Dämonaden: Agenten mit individuellen mehrwertigen Logiken

Ulrich Kramer
AutoLab, FH Bielefeld
Zimmerstraße 15, 33602 Bielefeld
Tel. 0521 520 72-31, Fax -66
e-mail: kramer@modal1.fh-bielefeld.de

Klassische Logik

Die klassische Logik beruht in ihrer Gesamtheit auf zwei grundlegenden Voraussetzungen, nämlich der ***Zweiwertigkeit*** ihrer Variablen und der ***Extensionalität*** ihrer Kontexte. Läßt man eine der beiden oder beide Voraussetzungen der klassischen Logik fallen, hat man es mit einer logischen Theorie zu tun, die der nichtklassischen Logik zuzuordnen ist [1]. Das bedeutet allerdings nicht, daß die klassische Logik vollständig auf Intensionen verzichten kann, denn die Vollständigkeit der Aussagenlogik sowie der Prädikatenlogik beruht gerade darauf, daß deren syntaktische Bestimmung (axiomatischer Aufbau) mit der semantischen Interpretation (Darstellung in Wahrheitstabellen) zusammenfallen. Im übrigen sind wohl die meisten der wohlbekannten Paradoxien der klassischen Logik durch sorgfältige Analyse des Sinns (d.h. der Intension) entsprechender Partikel und durch Einführen zusätzlicher Wahrheitswerte auflösbar [2].

So ist beispielsweise eine der ältesten Paradoxien, nämlich „ex falso quodlibet“ (aus etwas Falschem folgt Beliebiges, $p \wedge \neg p \rightarrow q$), dadurch auflösbar, daß man zwischen der Subjunktion $\supset$ und der Implikation $\rightarrow$ unterscheidet. Als Subjunktion stellt ein solcher Ausdruck eine Tautologie dar und muß deshalb als logisch wahr aufgefaßt werden, wenn auch eben nicht als gültiger logischer Schluß, weil dafür zusätzlich zu fordern wäre, daß die Prämisse logisch wahr ist, was im vorliegenden Fall gerade nicht zutrifft.

Obwohl die mit der Subjunktion verknüpften Paradoxien also recht bekannt sind, geben sie immer wieder Anlaß zu Spekulationen. So wird in [3] als Beispiel für eine im Sinne der klassischen Logik „eigentlich unzulässige“ neuronale Struktur die sogenannte Diallele von McCulloch angegeben, die folgenden Prozeß nachbilden soll: „Wenn A B vorgezogen wird, und B C, dann folgt, daß C A vorgezogen wird.“ Betrachtet man nun den Ausdruck

$$(A \Diamond B) \wedge (B \Diamond C) \supset (C \Diamond A) \qquad (1)$$

und fragt danach, für welche zweistelligen Operatoren $\Diamond$ ($\wedge, \vee, \supset, \equiv,$ etc.) dieser Ausdruck eine Tautologie darstellt, so zeigt sich, daß für sieben der sechzehn möglichen zweistelligen Verknüpfungen dieser Ausdruck logisch wahr ist, darunter auch die Operatoren < und >, so daß sich tatsächlich bei naiver Interpretation z.B. die Aussage ergäbe: „Wenn A größer als B und B größer als C ist, dann ist C größer als A“ - eine Aussage, die sich mit der gewöhnlichen Anschauung nur deshalb schwerlich in Einklang bringen läßt, weil (1) zwar ein logisch wahrer

Ausdruck ist, aber eben keine korrekte Schlußregel darstellt. Somit würde auch die Diallele von MCCULLOCH für sich genommen noch keine Rechtfertigung dafür liefern, eine neue, „transklassische Logik“ zu konstruieren. Dennoch möge dieses Beispiel deutlich machen, daß auch in der elementaren klassischen Aussagenlogik eine angemessene Interpretation unverzichtbar ist, sofern man sie auf reale Sachverhalte anwendbar machen will.

Ein anderes Beispiel soll zeigen, daß auch das Prinzip der Zweiwertigkeit bereits bei relativ harmlosen Aussagen außer Kraft gesetzt werden kann, sofern man diese nicht von vorneherein für nichtrelevant erklären will, weshalb dann die Logik auch nicht zuständig sei. Nehmen wir den Satz: „Karl hat aufgehört, seine Frau zu schlagen“, so gibt es mindestens drei Möglichkeiten, diesen Satz zu verneinen: a) „Karl hat nicht aufgehört, seine Frau zu schlagen“, b) „Karl hat aufgehört, seine Frau nicht zu schlagen“, oder c) „Karl hat seine Frau überhaupt nie geschlagen“. Um diese in keiner Weise semantisch übereinstimmenden Aussagen abbilden zu können, macht man in der nichtklassischen Prädikationstheorie einen Unterschied zwischen der Negation einer Aussage $\neg P(x)$ (äußere Negation) und der Negation einer Prädikation $\overline{P}(x)$ (innere Negation), so daß die Prädikation drei mögliche Ergebnisse haben kann:

$P(x): P \rightarrow x$	(x hat das Prädikat P)
$\overline{P}(x): P \rightarrow x$	(x hat nicht das Prädikat P)
$\neg P(x) \wedge \neg\overline{P}(x): P \rightarrow ?x$	(es ist nicht der Fall, daß x das Prädikat P hat, und es ist nicht der Fall, daß x das Prädikat P nicht hat)

Unbeschadet des Einwandes, daß dieser „Zwischenwert“ $P \rightarrow ?x$ durch die beiden Negationen ausgedrückt werden könne [2], bleibt festzuhalten, daß offenbar eine Prädikation zutreffend sein kann oder nicht zutreffend oder eben überhaupt nicht anwendbar ist wie beispielsweise „gleichschenklige Dreiecke sind grün“.

Mehrwertige Logik

Die mehrwertige Logik erlangte in letzter Zeit eine gewisse Prominenz, da sie in Gestalt der Theorie unscharfer Mengen (fuzzy sets theory) in technischen Anwendungen zu weit verbreitetem Einsatz kam. Sie kann abgebildet werden auf eine abgeschwächte BOOLEsche, oder wie in [4] gesagt wird: DE MORGANsche oder soft Algebra, in der die Sätze vom ausgeschlossenen Dritten ($A \vee \overline{A} = 1$) und vom ausgeschlossen Widerspruch ($A \wedge \overline{A} = 0$) außer Kraft gesetzt sind. Die zugehörigen logischen Operationen können auf unterschiedliche Weise eingeführt werden. Die bekanntesten Definitionen sind:

$$\mathrm{non}_1(x) = 1 - x$$
$$\mathrm{non}_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \\ x - \dfrac{1}{N-1} & \text{if } x \neq 0 \end{cases} \qquad \text{(Negation)} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} et_1(x,y) &= \min(x,y) \\ et_2(x,y) &= \max(0, x+y-1) \\ et_3(x,y) &= x \cdot y \end{aligned} \qquad \text{(Konjunktion)} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} vel_1(x,y) &= \max(x,y) \\ vel_2(x,y) &= \min(1, x+y) \\ vel_3(x,y) &= x+y-x \cdot y \end{aligned} \qquad \text{(Disjunktion)} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} seq_1(x,y) &= \min(1, 1-x+y) \\ seq_2(x,y) &= \begin{cases} 1 & \text{if } x \le y \\ y & \text{if } x > y \end{cases} \\ seq_3(x,y) &= \begin{cases} 1 & \text{if } x \le y \\ 0 & \text{if } x > y \end{cases} \end{aligned} \qquad \text{(Subjunktion)} \qquad (5)$$

Diese üblichen Formen der Definition mehrwertiger logischer Systeme verweisen darauf, daß es durchaus nicht zwingend ist, sich für das eine oder das andere System zu entscheiden. Man kann im übrigen die Mehrdeutigkeit auch noch beliebig anreichern, wenn man bedenkt, daß bereits bei elementaren digitalen Systemen mit BOOLEschen Signalvektoren und entsprechender Codierung gearbeitet wird. Es ist dann beispielsweise ohne weiteres möglich, einen vierwertigen Logikkalkül mit folgenden Verknüpfungsoperationen zu konstruieren:

p	non (p)
0	3
1	2
2	1
3	0

conj (p,q)	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	2	2
3	0	1	2	3

disj (p,q)	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	3	3
2	2	3	2	3
3	3	3	3	3

seq (p,q)	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	2	3	2	3
2	1	1	3	3
3	0	1	2	3

Tabelle 1

Ein aufmerksamer Leser würde bemerken, daß an dieser Logik genaugenommen nichts Erstaunliches zu finden ist, weil sie nichts anderes darstellt als eine zweiwertige, zweidimensionale Logik, deren BOOLEsche Vektoren als BCDs (binary coded digits, binär codierte Ziffern) interpretiert werden. Es ist also:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

wobei die vier aufgeführten Operationen komponentenweise anzuwenden sind. Es ist klar, daß man auf diese Weise nahezu beliebige „Logiken“ einführen kann, und die Frage erhebt sich, welches logische System das dem jeweiligen Problem, der Situation, dem Kontext usw. angemessenste ist.

Modallogik

Die Modallogik scheint auf den ersten Blick mit der soeben aufgeworfenen Fragestellung nichts zu tun zu haben, da sie sich mit der Gültigkeit von logischen Schlußfiguren befaßt, die Partikel wie „es ist möglich, daß ...“ oder „es ist notwendig, daß ...“ enthalten. Als Ausgangspunkt kann wiederum ein Paradoxon genommen werden, das beispielsweise aus den beiden als gültig anerkannten Prämissen

$\Box A \to \Diamond A$ (aus der Notwendigkeit von A folgt die Möglichkeit von A)

$\Diamond A \to \Diamond \neg A$ (aus der Möglichkeit von A folgt die Möglichkeit von nicht-A)

nach den Regeln der klassischen Logik die modale Aussage

$\Box A \to \Diamond \neg A$ (aus der Notwendigkeit von A folgt die Möglichkeit von nicht-A)

bilden ließe, was ganz offensichtlich einen logischen Widerspruch darstellen würde.

Der Grundgedanke für den Aufbau einer Modallogik mittels Relationensemantik ist bereits in der Monadologie LEIBNIZ zu finden, derzufolge sub ratione possibilitatis die Notwendigkeit eine allgemeine Gesetzmäßigkeit ist, die in allen möglichen Welten zu gelten hat. Dementsprechend wird in [1] definiert:

$$\nu(\Box A, w) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underset{w \in W}{\forall}\, w\mathbf{R}w' \Rightarrow \nu(A, w') = 1 \tag{6}$$

Das bedeutet, es wird eine Menge W „möglicher Welten“ eingeführt, die vermittels der Relation **R** miteinander verbunden sind. Eine Aussage A gilt genau dann als notwendig, wenn ihre Wahrheitsfunktion $\nu(A, w')$ in allen möglichen Welten $w' \in W$ logisch wahr ist, die von w aus über die Relation **R** erreichbar sind. Bemerkenswerterweise hängt der Umfang der hierauf beruhenden modalen Kalküle bzw. die Anzahl der den jeweiligen Kalkül fundierenden Axiome von der Struktur dieser Relation **R** ab, d.h. davon, ob **R** reflexiv, reflexiv/transitiv oder reflexiv/transitiv/symmetrisch ist. Man kann auch sagen, daß eine bestimmte Hintergrund- oder Tiefenstruktur des Zusammenhangs der miteinander verbundenen logischen Domänen einen bestimmten Kalkül induzieren. In diesem Zusammenhang sei darauf verwiesen, daß auch der unscharfen Logik eine Struktur unterlegt werden kann, die diese beispielsweise für die Bildung von Ähnlichkeitsklassen (unscharfe Äquivalenzklassen) geeignet macht, was offenkundig für Erkennungsaufgaben von Bedeutung ist [5].

Polykontexturale Stellenwertlogik

In der GÜNTHERschen polykontexturalen Stellenwertlogik [6] wird, ähnlich wie in der Relationensemantik, die Mehrwertigkeit nicht in einem „universe of discourse“ konzentriert, sondern auf mehrere logische Bereiche verteilt oder disseminiert. Das heißt, nicht allein die Anzahl der logischen Werte, sondern darüber hinaus auch die Anzahl der örtlich-zeitlichen Gültigkeitsbereiche (Stellen, logical domains) wird variabel gehalten. Dabei wird die Zweiwertigkeit der Logik nicht als universell, sondern als multiversell, wenn auch ubiquitär gültig unterstellt. So gibt es für eine lokale Negation genau drei mögliche Wertekonfigurationen, je nachdem in welchem der drei Bereiche die Negation vollzogen wird:

p	$non_1(p)$	$non_2(p)$	$non_3(p)$
W	U	W	F
U	W	F	U
F	F	U	W

Tabelle 2

Bei Verknüpfungsoperationen mit mindestens zwei Operanden wie Konjunktion oder Disjunktion kann man, je nach Verteilung der lokal wirkenden Verknüpfungen, eine Vielzahl von dreiwertigen Wertemustern erzeugen. Für die Verteilung von zwei solchen Verknüpfungen auf drei Stellen ergeben sich folgende $2^3 = 8$ Möglichkeiten, wobei die Hintereinanderausführung der lokal wirkenden Verknüpfungen als Überlagerung der entstehenden Belegungen zu interpretieren ist:

p	q	$^{!}op$	^{2}op	^{3}op	^{4}op	^{5}op	^{6}op	^{7}op	^{8}op
W	W	W	W	W	W	W	W	W	W
U	W	U	W	U	W	U	W	U	W
F	W	F	F	F	F	W	W	W	W
W	U	U	W	U	W	U	W	U	W
U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
F	U	F	F	U	F	F	F	U	U
W	F	F	F	F	F	W	W	W	W
U	F	F	F	U	U	F	F	U	U
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

Tabelle 3

Man erhält hierbei also, global betrachtet (d.h. bei Betrachtung aller drei logischer Bereiche), Wertebelegungen, deren Charakteristik von konjunktiv bis disjunktiv reicht, und die die Belegungen beispielsweise einer LUKASIEWICZ-Logik, gewissermaßen als Extremausprägung, mitenthalten: ^{1}op in der GÜNTHERschen Logik würde dort der Konjunktion $et(p,q)$ und ^{8}op der Disjunktion $vel(p,q)$ entsprechen.

Dämonadenlogik

Sowohl bei mehrwertigen als auch bei mehrstelligen Logiksystemen geht es letztlich um die Frage, wie zwischen individuell wirksamen Logikkalkülen in verschiedenen zeitlich-örtlichen Gültigkeitsbereichen vermittelt werden kann. Im Folgenden soll kurz erörtert werden, inwieweit dieses Problem von technischer Relevanz sein könnte. Wie bereits in [7] dargelegt worden ist, scheint es mindestens ein Aspekt, wenn nicht sogar ein ganz wesentliches Prinzip des Neuen zu sein, daß mehrere Bezugsrahmen (Kontexte) „bisoziiert" werden, d.h. eine Situation oder ein Ereignis wird in zwei oder mehreren sich einander ausschließenden Assoziationsrahmen wahrgenommen.

Diesem Ansatz wurde in [8] weiter nachgegangen, wobei weitere Beispiele aus verschiedenen Bereichen untersucht wurden, in denen man sich mit der Entstehung von Neuem befaßt. In den bislang analysierten Modellen gibt es ein immer wiederkehrendes Motiv, das darin besteht, daß Neues grundsätzlich aus einer kritischen Situation hervorgeht, in der entweder die äußeren Bedingungen oder die internen Zustände frustriert sind. ***Frustration*** bedeutet hierbei, daß eine Anzahl von Bedingungen bzw. Zuständen bezüglich einer Präferenzrelation nicht entscheidbar sind, daß sie also eine Halbordnungsstruktur aufweisen. Es besteht somit ein Zwang, zusätzliche neue Merkmale bei der Lösung der Erkennungs- bzw. Entscheidungsaufgabe heranzuziehen, die zuvor irrelevant gewesen sind. Man spricht bei dieser Art von Erweiterung des Merkmal- oder Signalsystems gelegentlich auch von ***Ritualisation***. Erweitert man das Merkmal- oder Signalsystem nicht, so ist man zu Kompromissen gezwungen, und der entsprechende Zustand wird als ***Kompromittierung*** bezeichnet. Die Folge ist, daß man dann in dem Zirkel Frustration - Kompromittierung - Frustration verbleibt.

Die technische Bedeutung ist unmittelbar einsichtig: bei selbstlernenden Systemen (unsupervised learning, Lernen ohne Ermutigung) geht es gerade darum, ohne im voraus bekannte Trainingssituationen oder -muster eine Verbesserung der Erkennungs- bzw. Entscheidungsleistungen herbeizuführen. Es ist klar, daß dabei grundsätzlich die Grenzen des Selbstlernens von dem Konstrukteur durch dessen Auswahl der Sensoren vorgegeben werden. Selbst unter diesen Randbedingungen und ganz allgemein kann man für kognitive Situationen feststellen, daß neue externe Zustände nur dann erkennbar sind, wenn sie internen Zuständen auf irgendeine Weise zugeordnet werden können. Hieraus folgt, daß es redundante interne Zustände bereits geben muß, bevor neue externe Zustände auftreten können. Diese Redundanzen entsprechen den oben erwähnten unentscheidbaren Zuständen, da es - noch - kein Merkmal gibt, aufgrund dessen einem bestimmten internen Zustand der Vorzug gegeben werden könnte.

Unter Dämonaden, einer Synthese aus LEIBNIZ' Monaden SELFRIDGES Pandämonium, sollen logische Einheiten verstanden werden, die durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet sein mögen: sie haben individuelle mehrwertige Logiken und können extern vorgegebene Muster erkennen, in dem sie Hypothesen generieren, den Grad der Übereinstimmung mit externen Mustern bestimmen und mit mit anderen Dämonaden kommunizieren können.

Demonstrationsbeispiel „Daemonaden-Mastermind“

Gegeben sei eine Reihe von Marken, die unterschiedliche Farben haben; die Aufgabe bestehe darin, in einer möglichst geringen Anzahl von Schritten die Farbe und Position der Marken korrekt anzugeben, wobei die einzig verfügbare Information die Rückmeldung der Anzahl korrekter Farben sowie korrekter Farbe und Position ist. Der Einfachheit halber wollen wir die Farben durch Ziffern kennzeichnen. Die Aufgabe des Pandämonadiums, d.h. einer Konfiguration von Dämonaden, bestehe darin, auf der Grundlage einer Anfangshypothese und der Auswertung der verfügbaren Rückmeldung sowie durch wechselseitige Kommunikation eine Folgehypothese zu generieren, die die Markenreihe in Farben und Positionen richtig wiedergibt. Der erste Schritt des Erkennungsvorgangs ist die Aufstellung beliebiger Anfangshypothesen durch jede der Dämonaden, deren Anzahl gleich der Anzahl möglicher Umtauschrelationen zwischen den logischen Domänen ist, in der es jeweils genau zwei verschiedene Farben gibt. Als Antwort erhält jede Dämonade eine Kennzahl, mit der der Grad der Übereinstimmung mit der von ihr jeweils angenommenen Markenreihe beschrieben wird. Als Rückmeldung erhalten die Dämonaden daraufhin folgende Kennzahlen: richtige Farbe:1, richtige Farbe und richtige Position: 10. Im nächsten Schritt generiert jede Dämonade jeweils lokal alle Kombinationen, die aufgrund ihrer Anfangshypothese und der zugehörigen Bewertung zulässig sind.

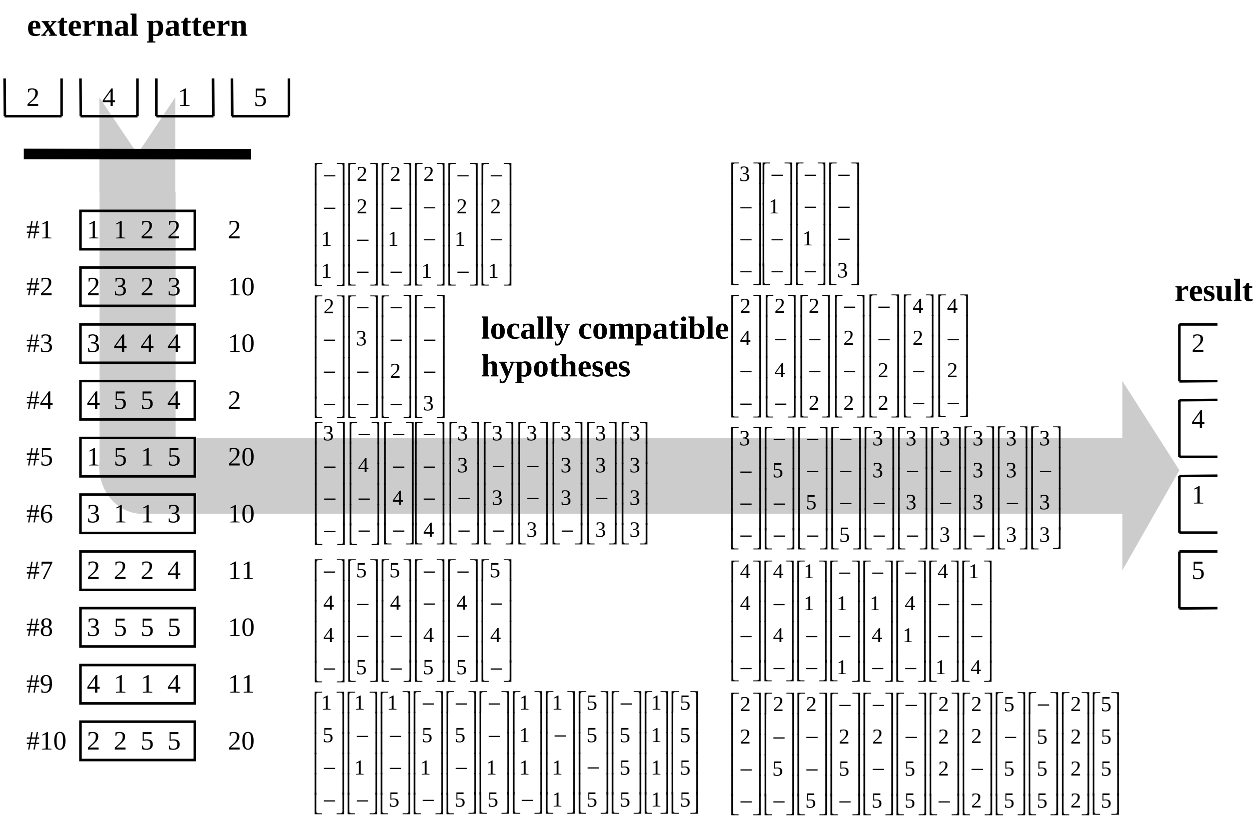

Bild 1 Pandämonadium in Aktion: Dämonaden-Mastermind

Beim interdämonadialen Vergleich kann man im Prinzip mit einer beliebigen Dämonade beginnen und den Vergleich mit einer ihrer Nachbardämonaden durchführen. Die jeweiligen Muster werden miteinander verschmolzen, sofern entsprechende Positionen frei sind und auf den besetzten Positionen keine Widersprüche auftreten. Die hierbei entstehenden Muster kommen als Kandidaten für die Folgehypothese in Betracht, alle anderen scheiden aus.

Schlußfolgerung und Ausblick

Im vorliegenden Beitrag wird unterstellt, es gäbe technische Gebilde, die jeweils lokal Kontexturen dadurch erzeugen, daß sie fähig sind, Zeichen zu erkennen und miteinander zu kommunizieren. Dies bedeutet aber nicht nur, daß damit eine Binnenstruktur festgelegt wird, sondern es hat zudem Auswirkungen auf die Erkennungsleistungen des entsprechenden technischen Systems, im vorliegenden Fall des Pandämonadiums also auf die Erkennung von mehrfarbigen Mustern. Eine Frage, die sich auch hierbei sofort aufdrängt, ist dann, ob es möglich ist, neue, vorher noch nicht dargebotene Zeichen zu erkennen. Die vorläufige Antwort, die das oben angegebene Beispiel suggeriert, müßte dann lauten, daß dies ohne weiteres möglich ist, sofern geeignete Korrespondenzprinzipien zugrundegelegt werden können, nach denen sich externe und interne Zustände des Pandämonadiums einander angleichen, und sofern sich keine „kombinatorische Explosion“ ereignet, womit wir wieder einmal mehr auf den Berechenbarkeitsaspekt zurückverwiesen werden würden.

Literatur

[1] Kreiser, L.; Gottwald, S.; Stelzner, W.: *Nichtklassische Logik*. Akademie-Verlag, Berlin, 1990.

[2] Wessel, H.: *Logik*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1984.

[3] Paul, J.: *Exploration medizinischer Daten mit Hilfe von computersimulierten neuronalen Netzen am Beispiel der Thermoregulationsdiagnostik*. Dissertation, Universität Witten/Herdecke, Bereich Medizin, 1992.

[4] Negoita, C.V.; Ralescu, D.A.: *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*. Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart, 1975.

[5] Kramer, U.: Uncertainty and similarity: Cognitive aspects of human-machine interaction. *Proc. 3rd European Annual Manual*, Riso (Denmark), 1983.

[6] Günther, G.: *Beiträge zur Grundlegung einer operationsfähigen Dialektik*, Band 1, 2 und 3. Meiner, Hamburg, 1976, 1979, 1980.

[7] Kramer, U.: Mehrwertige Logiken und ihre Anwendung im Innovations- und Ressourcen-Management. *AutoLab-Mitteilung Dezember 95*, FH Bielefeld, 1995.

[8] Kramer, U.: Perspektiven von Systemkonzepten nichtklassischer Logiken: Anwendungen bei komplexen technischen Systemen. *Fuzzy ‘96*, Zittau, 1996.