Thomas MAHLER
Ruhr-Universität Bochum

vordenker
Sommer Edition 2007

Kombinatorische Analyse der Polysemie

Untersuchungen zu Morphogrammatik und Polykontexturaler Logik

ICS - Symposium. Dresden. Nov.'91
KYBERNETIK UND SYSTEMTHEORIE
-Wissenschaftsgebiete der Zukunft?-

Kombinatorische Analyse der Polysemie

Untersuchungen zu Morphogrammatik und Polykontexturaler Logik

Thomas Mahler, Ruhr-Universität Bochum,
VW-Projekt, "Theorie komplexer biologischer Systeme"

Wer meine Musik versteht,
braucht nie mehr traurig zu sein.
L.v. Beethoven

1 Das kombinatorische Problem der Polysemie

In der Polykontexturalen Logik und der Güntherschen Stellenwertlogik ist die Komposition von Morphogrammen zu Morphogrammatrizen keine eindeutige Operation, sondern kann eine ganze Klasse von morphogrammatisch äquivalenten, jedoch kenogrammatisch verschiedenen Matrizen erzeugen. Für diese Mehrdeutigkeit wurde der Begriff der *Polysemie* eingeführt [Kae74].

Im vierten Kapitel ihrer Arbeit *'On structural analysis of many valued logic'* die in Zusammenarbeit mit G. Günther und H.v. Foerster erstellt wurde [Na64], stellt H.S.H. Na eine umfassende kombinatorische Analyse der Komposition morphogrammatischer Strukturen vor. Allgemeiner Ausgangspunkt ihrer Überlegungen sind aussagenlogische Systeme $L(n,s)$ mit n Variablen und s Werten, die durch ihre zugrundeliegenden morphogrammatischen Strukturen repräsentiert werden. Jeweils $\binom{m}{s}$ solcher $L(n,s)$ Strukturen können zu einer $L(n,m)$ *Verbundstruktur* komponiert werden. In der Güntherschen Stellenwertlogik können $\binom{3}{2} = 3$ $L(2,2)$ Strukturen zu einem $L(2,3)$ Verbund komponiert werden. Wobei die Basismorphogramme die Strukturen des $L(2,2)$ Systems sind.

Um Fragen nach der Komponierbarkeit bestimmter Strukturen und der Anzahl von Polysemen bestimmter Kompositionen zu beantworten, führt Na zunächst eine allgemeine strukturelle Klassifikation morphogrammatischer Strukturen ein, um dann mittels dieser Klassifikation die Komposition der Strukturen zu analysieren.

2 Die Klassifikation morphogrammatischer Strukturen

Na analysiert aussagenlogische Systeme $L(n, s)$ mit n Variablen und s Werten, sowie deren zugrundeliegenden morphogrammatischen Strukturen. „*Every $L(n, m)$-system, according to the theory of decomposibility, represents a set of morphogrammatic structures. In the case of [the] $L(2, 2)$-system, the structures are the fifteen morphograms ...*“ ([Na64], p.72). Eine m-wertige Verbundstruktur aus $L(n, m)$ ist aus $\binom{m}{s}$ $L(n, s)$ Strukturen zusammengesetzt.

Beispiel:

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	2	2
2	1	2
2	2	2

entspr. $\begin{array}{c|cc} \wedge & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \xrightarrow{TNF^1} \begin{array}{cc} \circ & \triangle \\ \triangle & \triangle \end{array}$

ist eine Struktur aus $L(2, 2)$.

$$\begin{array}{c|ccc} \wedge\wedge\wedge & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \xrightarrow{TNF} \begin{array}{ccc} \circ & \triangle & \square \\ \triangle & \triangle & \square \\ \square & \square & \square \end{array}$$

ist eine Struktur aus $L(2, 3)$ und enthält $\binom{3}{2}$ Subsysteme:

$$\begin{array}{c|cc} \wedge^1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \wedge^2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \wedge^3 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \xrightarrow{TNF} \begin{array}{cc} \circ & \triangle \\ \triangle & \triangle \end{array}$$

Die Zerlegung in Subsysteme ist eindeutig. Für die Möglichkeit der Komposition morphogrammatischer Strukturen ist nur die Gestalt der Hauptdiagonalen relevant [Kae74]. Die Hauptdiagonale einer morphogrammatischen Struktur nennt Na *Rahmen* ('frame') alle übrigen Elemente bilden den *Kern* ('core').

Beispiel:

[1] die kenogrammatische Tritonormalform TNF abstrahiert von der Wertigkeit einer Wertsequenz, nicht jedoch von der Struktur semiotischer Gleichheit und Verschiedenheit innerhalb der Wertsequenz. Z.B.: $TNF[1,2,1,2] = \circ\triangle\circ\triangle$, $TNF[2,1,2,1] = \circ\triangle\circ\triangle$, $TNF[2,2,1,1] = \circ\circ\triangle\triangle$.

	1 2 3	
1	**1** 2 3	- core
2	2 **2** 3	
3	3 3 **3**	- **frame**

Wie aus dieser n-dimensionalen Darstellung ersichtlich, besteht die Hauptdiagonale (der frame) einer $L(n,m)$-Struktur aus m Stellen. Der core enthält die restlichen $m^n - m$ Elemente.

2.1 Rahmen eines $L(n,m)$ Systems

Na zeigt (Theorem 4.1) daß es in einem System $L(n,m)$ genau

$$NF(m) = \sum_{k=1}^{m} S(m,k) \tag{1}$$

verschiedene frames gibt.

Beweis: Die Stirlingzahl der 2. Art $S(m,k)$ bestimmt die Anzahl von Möglichkeiten, m Stellen mit k verschiedenen Objekten zu belegen. Die Kardinalität der Menge m-elementiger frames, die genau k verschiedene Kenogramme benutzen, ist also durch $S(m,k)$ bestimmt. Da frames der Länge m mindestens ein Kenogramm, höchstens jedoch m verschiedene benutzen, ergibt sich folglich als Gesamtanzahl

$$NF(m) = \sum_{k=1}^{m} S(m,k) \quad \blacksquare$$

Beispiel: Für $L(2,2)$, ergibt sich:

$$\begin{aligned} NF(2) &= \sum_{k=1}^{2} S(2,k) \\ &= S(2,1) + S(2,2) \\ &= 1 + 1 \\ &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

Da $L(2,2)$ durch die 15 Basismorphogramme repräsentiert wird, auf deren Hauptdiagonale jeweils 2 Kenogramme liegen, gibt es genau $NF(2) = 2$ Strukturmöglichkeiten: ○○ und ○△. Für $L(2,3)$ gibt es $NF(3)$ verschiedene Gestalten der Hauptdiagonale:

$$\begin{aligned} NF(3) &= \sum_{k=1}^{3} S(3,k) \\ &= S(3,1) + S(3,2) + S(3,3) \\ &= 1 + 3 + 1 \\ &= \mathbf{5}. \end{aligned}$$

Als Kenogrammsequenzen dargestellt: ○○○, ○○△, ○△○, ○△△, ○△□.

2.2 Rahmengruppen eines $L(n,m)$ Systems

Die $NF(m)$ verschiedenen Rahmen des $L(n,m)$ Systems teilt Na nun in Gruppen auf. Zwei Rahmen mit der gleichen Anzahl k verschiedener Kenogramme und der gleichen Partitionierung der m Stellen über diesen Kenogrammen gehören zur gleichen *Rahmengruppe* 'framegroup'. Die Rahmen ○○△, ○△○ und ○△△ aus dem vorhergehenden Beispiel gehören zur gleichen Rahmengruppe, da sie zwei verschiedene Kenogramme benutzen, wovon eins einmal, das jeweils andere zweimal auftritt. Eine Rahmengruppe ist also bestimmt durch eine Partition von m Stellen über k Kenogrammen. Folglich gibt es genau (Theorem 4.2):

$$GF(m) = \sum_{k=1}^{m} P(m,k) \tag{2}$$

verschiedene Rahmengruppen für jedes m-wertige System. $P(m,k)$ steht hier für die Anzahl möglicher Partitionen von m Elementen über k Klassen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} GF(2) &= \sum_{k=1}^{2} P(2,k) \\ &= P(2,1) + P(2,2) \\ &= 1+1 \\ &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

Dies ist die Anzahl der möglichen Kenogrammstrukturen: [○○, ○△].

$$\begin{aligned} GF(3) &= \sum_{k=1}^{3} P(3,k) \\ &= P(3,1) + P(3,2) + P(3,3) \\ &= 1+1+1 \\ &= \mathbf{3} \end{aligned}$$

Die möglichen Kenogrammstrukturen sind: [○○○, ○○△, ○△□].

Anhand der Kenogrammstruktur von $GF(3)$ erkennen wir, daß Na's Einteilung der Rahmen in Gruppen der Deutero-Abstraktion von Wertsequenzen entspricht [Sch67a][Kro86].

2.3 Der Grad einer Gruppe

Die Anzahl der Kenogramme, die von den Rahmen einer Rahmengruppe benutzt werden, nennt Na den *Grad*, ('rank'), der Gruppe. Der Grad einer bestimmten Gruppe G_J wird mit k_J bezeichnet.

Eine Rahmengruppe vom Grad k enthält:

$$g\{m_k\} = \frac{m!}{\prod_{i=1}^{k} m_i!} \tag{3}$$

Elemente, wobei $m_1, m_2, \cdots, m_k$ die Verteilung der k Kenogramme darstellt und $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = m$ (Theorem 4.3).

Beweis: Für m Stellen gibt es $m!$ Permutationen. Wenn m_i Stellen mit dem gleichen Kenogramm belegt sind, erzeugen Permutationen unter diesen m_i Stellen *keine unterschiedlichen* Rahmen. Da die m_i Wiederholungen des gleichen Kenogramms $m_i!$ deutero-äquivalente Rahmen erzeugen, gibt es genau:

$$\frac{m!}{m_1! \times m_2! \times \cdots \times m_k!} = g\{m_k\}$$

verschiedene Rahmen, die zu der Gruppe vom Grad k mit der Verteilung $m_1, m_2, \cdots, m_k$ gehören. ∎

Beispiel: Wieviele verschiedene frames enthält die Rahmengruppe mit genau zwei verschiedenen Kenogrammen (Grad $k = 2$) in einem dreiwertigem System $L(2,3)$ $(m = 3)$?

$$g\{3_2\} = \frac{3!}{\prod_{i=1}^{2} m_i}! = \frac{6}{m_1!m_2!}$$

in diesem Fall ist die einzig mögliche Verteilung für die m_i: $m_1 = 1, m_2 = 2$ und $m_1 + m_2 = 3$, also ist

$$g\{3_2\} = \frac{6}{1!2!} = \mathbf{3}$$

Dies ist die Anzahl der (Trito-)frames [○○△, ○△○, ○△△] in der (Deutero-)Gruppe ○○△.

2.4 Unterteilung der Rahmengruppen in Klassen

Die Elemente dieser Gruppen unterteilt Na nun weiter in verschiedene Klassen entsprechend der Anzahl verschiedener Kenogramme, die von der gesamten morphogrammatischen Struktur (sowohl Frame- als auch Coreelemente) benutzt werden. Die Anzahl der Kenogramme r die von den Strukturen einer solchen *strukturellen Klasse* ('structural class') benutzt werden nennt sie den *Grad der Klasse* ('rank of the class'). Sie bezeichnet wie folgt: C_{J_r} ist eine strukturelle Klasse der Gruppe G_J mit dem Grad r.

Bezeichne k_J den Grad der Gruppe G_J (k_J verschiedene Kenogramme in den Rahmen der Gruppe J), dann gilt (Theorem 4.4):

$$k_J \leq r \leq r_J \tag{4}$$

wobei

$$r_J = (m^n - m) + k_J \tag{5}$$

die maximale Anzahl unterschiedlicher Kenogramme ist, die von den Strukturen aus G_J benutzt werden können.

Beweis: Jede Struktur des Systems $L(n,m)$ hat m^n Stellen. Von den m Rahmenstellen werden genau k_J verschiedene Kenogramme benutzt. Die restlichen $m^n - m$ Stellen können höchstens $m^n - m$ verschiedene Kenogramme belegen. Also ist

$$r_J = (m^n - m) + k_J$$

und $r \leq r_J$. Nur wenn alle Stellen des Kerns mit den gleichen Kenogrammen wie der Rahmen belegt wird, kann $r = k_J$ werden. Also gilt

$$k_J \leq r \leq r_J \quad \blacksquare$$

Da Klassen nach der Anzahl verwendeter Kenogramme unterschieden werden und von den Strukturen einer Gruppe G_J höchstens aber r_J verschiedene Kenogramme benutzt werden, gibt es (Theorem 4.5):

$$d_J = r_J - k_J + 1 \tag{6}$$

verschiedene Klassen in G_J

Beispiel: Wieviele strukturelle Klassen gibt es in der Gruppe G_2 von $L(2,2)$, deren Rahmenstellen zwei verschiedene Kenogramme ($\circ\triangle$) benutzen?

$$\begin{aligned} k_2 &= 2 \\ \\ r_2 &= 2^2 - 2 + 2 \\ &= \mathbf{4} \\ \\ d_2 &= 4 - 2 + 1 \\ &= \mathbf{3} \end{aligned}$$

nämlich jeweils eine Klasse mit 2, 3 und 4 verschiedenen Kenogrammen (C_{22}, C_{23}, C_{24} in Tabelle 1).

Die Anzahl der verschiedenen Strukturen, die zu einer Klasse C_{J^r} gehören, bezeichnet Na mit p_{J^r}, gibt allerdings keine Formel zur Bestimmung dieser Zahl an. Zum Abschluß des klassifikatorischen Teils gibt Na die vollständige Klassifikation von $L(2,2)$ an, die sie später für die Analyse der Komposition von $L(2,2)$ Strukturen zu $L(2,3)$ und $L(2,4)$ Verbundstrukturen benützt. Die Ergebnisse dieser Klassifikation sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Gruppe G_J	G_1					G_2									
k_J (Anzahl der Kenos im frame)	1 ○○					2 ○△									
r_J (max. Anzahl benutzter Kenos)	3 ○△□					4 ○△□★									
$d_J = \|G_J\|$	3					3									
Klasse C_{Jr}	C_{11}	C_{12}			C_{13}	C_{22}				C_{23}					C_{24}
Bezeichnung	α	β			γ	ξ				ρ					ϕ
$P_{Jr} = \|C_{Jr}\|$	1	3			1	4				5					1
morpho-	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
grammatische	○	○	△	△	△	○	○	△	△	○	□	△	□	□	□
Struktur	○	△	○	△	□	○	△	○	△	□	○	□	△	□	★
	○	○	○	○	○	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
Bezeichnung	I	B	C	E	T_E	D	P	Q	K	T_D	T_Q	T_K	T_P	T	U

Table 1: Die Klassifikation von $L(2,2)$ nach [Na64], p.78

3 Die Komposition von Verbundstrukturen

In der folgenden Diskussion der Komposition morphogrammatischer Strukturen beschränkt sich Na auf die Betrachtung von Fällen, bei denen die einzelnen Strukturen nur an ihren Rahmenstellen (Hauptdiagonalelementen) miteinander verkoppelt werden. So wird von ihre Analyse zwar die Komposition von $L(2,2)$ zu $L(2,3)$ und $L(2,4)$ Strukturen erfasst, nicht jedoch die Komposition von $L(2,3)$ zu $L(2,4)$ Strukturen.

3.1 Zulässige Kombinationen von Einheiten

Um eine $L(n,m)$ Struktur zu erzeugen, werden $\binom{m}{s}$ $L(n,s)$ Strukturen benötigt. Allerdings können nicht alle beliebigen Kombinationen solcher $L(n,s)$ Einheiten eine *Verbundstruktur* ('compound structure') bilden. Betrachten wir beispielsweise die Bildung eines $L(2,3)$ Verbundes aus drei $L(2,2)$ Einheiten (Basismorphogrammen). Werden die Morphogramme I = ○○○○, D = ○○○△ und P = ○○△△ benutzt, so ist es möglich einen $L(2,3)$ Verbund zu erzeugen:

Stelle	I	D	P	Verbund
1 1	○		○	○
1 2	○			○
1 3			○	○
2 1	○			○
2 2	○	○		○
2 3		○		○
3 1			△	△
3 2		○		○
3 3		△	△	△

oder abkürzend:

$[I, D, P]$	1 2 3
1	○ ○ ○
2	○ ○ ○
3	△ ○ △

Wie wir in Kapitel 3.1 gesehen haben, kann in diesem Verbund $[I, D, P]$ das Morphogramm P nicht durch E = ○△△○ ersetzt werden, da für die Morphogramme $[I$: c], $[D$: f], $[E$: c] nur f-c-Verteilungen möglich sind, für die keine Kompositionen existieren: {ccf, cfc, fcc}. Analog zu den Ergebnissen in Kapitel ?? stellt Na fest ([Na64], p.82):

„*Thus we may conclude: wether a set of $L(n, s)$ units may form an $L(n, m)$ structure or not depends solely on the fact wether their frames are compatible or not, namely, wether their frames can be linked without conflict or not.*"

3.2 Familien von Kombinationen

Ob $\binom{m}{s}$ $L(n, s)$ Einheiten zu einer $L(n.m)$ Struktur komponiert werden können, hängt also allein davon ab, ob ihre Rahmen ohne Konflikte zu einem $L(n, m)$ Rahmen zusammengefügt werden können. Es ist allerdings möglich, daß unterschiedliche zulässige Kombinationen von $L(n, s)$ Einheiten den gleichen $L(n, m)$ Rahmen bilden.

Beispiel: die Komposition der $L(2, 2)$ Morphogramme I, D und D ergibt den gleichen $L(2, 3)$ Rahmen wie die Komposition von I, K und K:

$[I, D, D]$	1 2 3
1	○ ○ ○
2	○ ○ ○
3	○ ○ △

$[I, K, K]$	1 2 3
1	○ ○ △
2	○ ○ △
3	△ △ △

frame		
○		
	○	
		△

An dieser Stelle wirft Na die Frage auf: „*Thus the next question is: given an $L(n, m)$-frame, how many admissible combinations are there?*" ([Na64], p.83). Die folgenden berlegungen sind der Beantwortung dieser Fragestellung gewidmet.

Betrachten wir zunächst den Fall der Komposition von $\binom{m}{s}$ $L(n, s)$ Einheiten zu einer $L(n, m)$ Verbundstruktur. Die Anzahl verschiedener Rahmengruppen des $L(n, s)$ Systems ist durch Gleichung (2) als $GF(s)$ bestimmt. Für eine bestimmte zulässige Kombination

K von $L(n, s)$ Einheiten wird die Anzahl Einheiten aus der Rahmengruppe j von $L(n, s)$ mit λ_j bezeichnet. Da $\binom{m}{s}$ Einheiten zusammengefügt werden, muß gelten:

$$\binom{m}{s} = \sum_{j=1}^{GF(s)} \lambda_j \tag{7}$$

> **Beispiel:** für die Komposition einer $L(2,3)$ Struktur aus den $L(2,2)$ Strukturen I, K, K gilt:
>
> $$I \in G_1 \qquad \lambda_1 = 1$$
> $$K \in G_2 \qquad \lambda_2 = 2$$
> $$GF(2) = 2$$
> $$\sum_{j=1}^{GF(2)} \lambda_j = 1 + 2 = \binom{3}{2} = 3$$

Der Grad k_j der $L(n, s)$ Gruppe j gibt die Anzahl der von den Einheiten dieser Gruppe benutzten Kenogramme an. Jede dieser $L(n, s)$ Einheiten besitzt s Rahmenstellen. Die s Rahmenstellen sind bei den Einheiten der Gruppe G_j über k_j Kenogramme verteilt, was wie folgt notiert wird:

$$s_1, s_2, \ldots, s_{k_j}$$

wobei gilt:

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_{k_j} = s$$

> **Beispiel:** in der Gruppe G_2 in $L(2,2)$ ist $k_2 = 2$ und $s = 2$, die erste Rahmenstelle benutzt das Kenogramm ○ und die zweite Rahmenstelle das Kenogramm $\triangle$, also $s_1 = 1$ und $s_2 = 1$, deshalb:
>
> $$s_1 + s_2 = 1 + 1 = 2 = s$$

Für die Kombination **K** sind die λ_j Einheiten aus der Grupe G_j über die d_j Klassen von G_j verteilt. Da sich die d_j Klassen nicht in der Anzahl und der Verteilung der benutzten Kenogramme der Rahmenstellen unterscheiden, sondern lediglich in der Gesamtanzahl, r, benutzter Kenograme der Strukturen differieren, ist jede Verteilung von λ_j über d_j für eine Komposition zulässig. Bezeichne $D(\lambda_j, d_j)$ die Anzahl aller möglichen Verteilungen von λ_j über d_j, dann gilt:

$$D(\lambda_j, d_j) = \binom{\lambda_j + d_j - 1}{\lambda_j} \tag{8}$$

Beispiel: die Kombination I, K, K aus dem vorherigen Beispiel benutzt eine Einheit aus der Gruppe G_1 und zwei Einheiten aus G_2. Für eine solche Kombination gilt allgemein:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1\\ \lambda_2 &= 2\\ d_1 &= 3\\ d_2 &= 3\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}D(1,3) &= \binom{1+3-1}{1} = \binom{3}{1} = \mathbf{3}\\ D(2,3) &= \binom{2+3-1}{2} = \binom{4}{2} = \mathbf{6}\end{aligned}$$

Da es $N = GF(s)\ L(n,s)$ Rahmengruppen gibt, sind über den $d_1 + d_2 + \cdots + d_N$ Klassen von $L(n,s)$

$$D(\lambda_1, d_1) \times D(\lambda_2, d_2) \times \cdots \times D(\lambda_N, d_N)$$

verschiedene Kombinationen von den $\binom{m}{s}$ $L(n,s)$ Einheiten möglich. Jede dieser Verteilungen der $(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N) = \binom{m}{s}$ Einheiten über den $(d_1 + d_2 + \cdots + d_N)$ Klassen von $L(n,s)$ bildet eine eigene *Familie* von $L(n,m)$ Strukturen, sodaß es also:

$$\varphi(m,s) = D(\lambda_1, d_1) \times D(\lambda_2, d_2) \times \cdots \times D(\lambda_N, d_N) \tag{9}$$

solcher Familien gibt.

Um diese Familien zu bezeichnen, soll für eine bestimmte zulässige Kombination n_{jr_i} die Anzahl benutzter Einheiten der Klasse C_{jr} aus der Gruppe G_j angeben. Wobei $1 \leq i \leq d_j$ und r_i der Grad der i-ten Klasse aus G_j ist. Die λ_j Einheiten aus G_j verteilen sich dann wie folgt über die d_j Klassen von G_j:

$$\lambda_j = n_{jr_1} + n_{jr_2} + \cdots + n_{jr_{d_j}}$$

Beispiel: Betrachten wir die Kombination I, B, T_E. Da $I \in C_{11}$, $B \in C_{12}$ und $T_E \in C_{13}$, ist hier $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 0$. Es gilt:

$$r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3 \qquad \text{für } G_1,$$

$$r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 4 \qquad \text{für } G_2$$

und

$$n_{11} = 1, n_{12} = 1, n_{13} = 1, n_{22} = 0, n_{23} = 0, n_{24} = 0$$

also:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 + 1 + 1 = 3\\ \lambda_2 &= 0 + 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

Da die Klasse C_{jr} p_{jr} Einheiten enthält und verschiedene $L(n,s)$ Einheiten zu unterschiedlichen $L(n,m)$ Verbundstrukturen komponiert werden können, enthält jede dieser Familien σ unterschiedliche $L(n,m)$ Kombinationen[2] (Theorem 4.8):

$$\sigma = \prod_{j=1}^{GF(s)} \left\{ \frac{\lambda_j!}{\prod_{i=1}^{d_j} n_{jr_i}!} \times \prod_{i=1}^{d_j} (p_{jr_i})^{n_{jr_i}} \right\} \tag{10}$$

Beweis: Die λ_j Einheiten sind über die d_j Klassen mit den Anzahlen $n_{jr_1}, n_{jr_2}, \ldots, n_{jr_{d_j}}$ verteilt. Da die Reihenfolge in einer Kombination von $L(n,s)$ Einheiten nicht berücksichtigt werden muß, erzeugen Permutationen innerhalb dieser n_{jr_i} Einheiten aus C_{jr_i} keine verschiedenen Kombinationen. Also gibt es nur:

$$\frac{\lambda_j!}{\prod_{i=1}^{d_j} n_{jr_i}!}$$

mögliche Permutationen, um unterscheidbare Kombinationen zu erzeugen. Für jede so gegebene Permutation existieren für jede der n_{jr_i} Einheiten genau p_{jr_i} mögliche Auswahlen aus der Klasse C_{jr_i}. Es gibt also:

$$(p_{jr_i})^{n_{jr_i}}$$

mögliche Auswahlen für alle d_j Klassen. Folglich sind:

$$\frac{\lambda_j!}{\prod_{i=1}^{d_j} n_{jr_i}!} \times \prod_{i=1}^{d_j} (p_{jr_i})^{n_{jr_i}}$$

unterschiedliche Kombinationen von den λ_j Einheiten aus G_j erzeugbar, falls alle anderen Einheiten aus den restlichen $GF(s)-1$ Gruppen unverändert bleiben. Werden auch für diese Einheiten Veränderungen zugelassen, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sigma &= \left\{ \frac{\lambda_1!}{\prod_{i=1}^{d_1} n_{1i}!} \times \prod_{i=1}^{d_1} (p_{1i})^{n_{1i}} \right\} \times \cdots \times \left\{ \frac{\lambda_N!}{\prod_{i=1}^{d_N} n_{Ni}!} \times \prod_{i=1}^{d_N} (p_{Ni})^{n_{Ni}} \right\} \\ &= \prod_{j=1}^{N} \left\{ \frac{\lambda_j!}{\prod_{i=1}^{d_j} n_{jr_i}!} \times \prod_{i=1}^{d_j} (p_{jr_i})^{n_{jr_i}} \right\}\end{aligned}$$

wobei $N = GF(s)$. ∎

[2] Da Na von einem feststehenden $L(n,m)$ Rahmen ausgeht, muß σ noch mit der Anzahl von $g\{m_{k_J}\}$ (Trito-)Rahmen der Rahmengruppe G_J multipliziert werden, um die tatsächliche Anzahl von möglichen Verbundstrukturen zu erhalten.

3.3 Exemplarische Berechnung

Die bis hierhin entwickelten Ergebnisse reichen aus, um die oben zitierte Fragestellung nach der Anzahl von Kombinationen von $L(n,s)$ Einheiten, die zu einem gegebenen $L(n,m)$ Rahmen komponiert werden können, zu beantworten. Dies soll exemplarisch vorgeführt werden.

Betrachtet wird das Problem, einen $L(2,3)$ Verbund mit dem Rahmen ○○○ aus $L(2,2)$ Morphogrammen zu generieren. Da der Rahmen für diesen speziellen Fall nur aus identischen Kenogrammen besteht($k = 1$), läßt er sich nicht aus Einheiten aus G_2 zusammensetzen ($k_2 = 2$). Also gilt:

$$d_1 = 3, d_2 = 3$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0$$

da $\lambda_2 = 0$, folgt:

$$n_{2r} = 0 \text{ für alle } r \in \{k_j, \ldots, r_j\}$$

Nach Gleichung (8) ergibt sich:

$$D(\lambda_1, d_1) = \binom{3+3-1}{3} = \mathbf{10}$$

und:

$$D(\lambda_2, d_2) = \binom{0+3+1}{0} = \mathbf{1}$$

zusammen mit Gleichung (9) ergibt sich hieraus:

$$\varphi(3,2) = 10 \times 1 = \mathbf{10}. \tag{11}$$

Das bedeutet, daß die $L(2,2)$ Morphogramme zehn Familien von $L(2,3)$ Strukturen

n_{11}	n_{12}	n_{13}	Familie	σ
3	0	0	α^3	1
2	1	0	$\alpha^2\beta$	9
2	0	1	$\alpha^2\gamma$	3
1	2	0	$\alpha\beta^2$	27
1	1	1	$\alpha\beta\gamma$	18
1	0	2	$\alpha\gamma^2$	3
0	3	0	β^3	27
0	2	1	$\beta^2\gamma$	27
0	1	2	$\beta\gamma^2$	9
0	0	3	γ^3	1

Table 2: Die Familien der ○○○ $L(2,3)$ Verbundstrukturen. [Na64], p.90

bilden können, deren Rahmengestalt ○○○ ist. Diese Familien und die entsprechenden Verteilungen der n_{jr_i} sind in der Tabelle 2 angegeben. Die Anzahl σ der $L(2,3)$ Verbundstrukturen für jede Familie, berechnet nach (10), ist in der letzten Spalte aufgeführt.

In der Abbildung 3 werden die neun Verbundstrukturen der Familie $\alpha^2\beta$ und die drei der Familie $\alpha^2\gamma$ beispielhaft angeführt.

Familie	$L(2,3)$ Strukturen
$\alpha^2\beta$	$[I,I,B],[I,B,I],[B,I,I]$, $[I,I,C],[I,C,I],[C,I,I]$, $[I,I,E],[I,E,I],[E,I,I]$
$\alpha^2\gamma$	$[I,I,T_E],[I,T_E,I],[T_E,I,I]$

Table 3: Familien und Verbundstrukturen nach [Na64], p.90

4 Komponierte Strukturen und Polysemie

4.1 Verbundstrukturen und Polyseme (M-functions)

Die Verkettung von Kenogrammsequenzen und folglich auch die Verkettung von Morphogrammen zu Verbundstrukturen sind ein-mehrdeutige Operationen. Die Verbundstruktur $[E,E,E]$ etwa repräsentiert fünf kenogrammatisch verschiedene $L(2,3)$ Strukturen:

$[EEE]_1$	1 2 3
1	○△△
2	△○△
3	△△○

$[EEE]_2$	1 2 3
1	○△□
2	△○△
3	□△○

$[EEE]_3$	1 2 3
1	○△△
2	△○□
3	△□○

$[EEE]_4$	1 2 3
1	○△□
2	△○□
3	□□○

$[EEE]_5$	1 2 3
1	○△★
2	△○□
3	★□○

Diese fünf Strukturen sind jeweils aus drei Morphogrammen vom Typ E aufgebaut, jedoch kenogrammatisch verschieden: $[EEE]_1$ benutzt zwei verschiedene Kenogramme, $[EEE]_2$, $[EEE]_3$ und $[EEE]_4$ jeweils drei, allerdings in unterschiedlicher Verteilung, $[EEE]_5$ benutzt vier Kenogramme. Diese kenogrammatisch verschiedenen, aber komponentenweise äquivalenten Strukturen nennt Na 'M-functions', für die in dieser Arbeit der Begriff *Polyseme* eingeführt wurde. Wir werden im Weiteren die beiden Begriffe synonym verwenden.

Weisen verschiedene M-functions die gleiche Komponentenstruktur auf, spricht Na davon, daß sie die gleiche 'synthetic structure' besitzen und zur gleichen 'category' von M-functions gehören. Die aus $L(n,s)$ Einheiten komponierten $L(n,m)$ Verbundstrukturen die in der bisherigen Diskussion betrachtet wurden, sind synthetische Strukturen und repräsentieren eine ganze *Kategorie* von M-functions. „Compound structures, discussed in the previous sections are thus synthetic structures and not M-function“ [Na64], p.92. Dieser Unterschied zwischen den synthetischen Strukturen und den M-functions drückt sich in der Notation wie folgt aus:

$$[M_1, M_2, \ldots, M_{\binom{m}{s}}]$$

bezeichnet eine $L(n,m)$ Verbundstruktur (synthetische Struktur), die sich aus $\binom{m}{s}$ $L(n,s)$ morphogrammatischen Strukturen (M_i) zusammensetzt. Auf Grund der Polysemie repräsentiert eine solche Verbundstruktur eine ganze Kategorie von MP M-functions:

$$[M_1 M_2 \ldots M_{\binom{m}{s}}]_1, \ldots, [M_1 M_2 \ldots M_{\binom{m}{s}}]_{MP}.$$

Mithilfe der folgenden berlegungen soll die Anzahl von M-functions (MP) einer gegebenen Kategorie bestimmt werden: *„The question which immediately follows the above discussion is: how many M-functions a given category contains?“*([Na64], p.93).

4.2 Der kenogrammatische Sättigungsgrad von M-functions

Um sich dieser Fragestellung zu nähern führt Na zuerst den Begriff des *Sättigungsgrades* einer M-function ein. Die fünf M-functions der Kategorie $[E,E,E]$ aus dem obigen Beispiel benutzen entweder zwei, drei oder vier verschiedene Kenogramme. Die Anzahl benutzter Kenogramme einer gegebenen M-function nennt Na 'rank of the M-function', was hier als Sättigungsgrad übersetzt ist. Diese Anzahl benutzter Kenogramme wird mit $\overset{*}{m}$ bezeichnet. Da eine M-function eines $L(n,m)$ System aus mindestens einem, höchstens jedoch m^n unterschiedlichen Kenogrammen aufgebaut ist, gilt für $L(n,m)$:

$$1 \leq \overset{*}{m} \leq m^n.$$

Beispiel: Für $L(2,3)$ kann $\overset{*}{m}$ Werte zwischen 1 und 3^2 annehmen.

$[III]_1$	1	2	3
1	○	○	○
2	○	○	○
3	○	○	○

$\overset{*}{m} = 1$

$[UUU]_{MP}$	1	2	3
1	○	△	∗
2	□	⋆	●
3	◇	▽	■

$\overset{*}{m} = 9$

Allerdings gilt nicht für jede Kategorie, daß $\overset{*}{m}$ alle Werte zwischen 1 und m^n annehmen kann. Für $[E,E,E]$ ist beispielsweise $\min\{\overset{*}{m}\} = 2$ und $\max\{\overset{*}{m}\} = 4$. $\min\{\overset{*}{m}\}$ wird mit $\mathbf{R}$ und $\max\{\overset{*}{m}\}$ mit $\mathbf{M}$ bezeichnet. Also gilt:

$$1 \leq \mathbf{R} \leq \overset{*}{m} \leq \mathbf{M} \leq m^n.$$

Na stellt fest, daß für jede Kategorie gilt:

$$\mathbf{R} = \max\{k_J, r_{\max}\}. \tag{12}$$

Wobei $r_{\max}$ das Maximum aller r_i für alle $n_{jr_i} \neq 0$ ist. k_J gibt die Anzahl der Kenogramme in der Rahmengruppe G_J von $L(n,m)$ an. n_{jr_i} bestimmt die Anzahl von Einheiten M_l aus der Klasse C_{jr_i} von $L(n,s)$, die die Kategorie benutzt.

Beispiel: Die Kategorie $[E, E, E]$ repräsentiert die folgende Verteilung:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 3 & \lambda_2 = 0 \\ n_{11} = 0 & n_{22} = 0 \\ n_{12} = 3 & n_{23} = 0 \\ n_{13} = 0 & n_{24} = 0 \end{array}$$

$[E, E, E]$ gehört zu der $L(2,3)$ Rahmengruppe ○○○, daher ist $k_J = 1$. Alle Einheiten der Verbundstruktur kommen aus C_{12} und enthalten jeweils zwei verschiedene Kenogramme, also ist:

$$r_{\max} = 2$$

und

$$\mathbf{R} = \max\{k_J, r_{\max}\} = 2$$

Der maximalen Sättigungsgrad $\mathbf{M}$ ist bestimmt durch:

$$\mathbf{M} = k_J + \sum_{j=1}^{GF(s)} \left\{ \sum_{i=1}^{d_j} (r_i - k_j) \times n_{jr_i} \right\}. \tag{13}$$

Beweis: Um für eine gegebene Verbundstruktur M-functions eines höheren Sättigungsgrades als $\mathbf{R}$ zu erzeugen, ist allein die Anzahl von Kenogrammen in den Corestellen der $L(n,s)$ Einheiten zu berücksichtigen, da die Anzahl k_J benutzter Kenogrammme des $L(n,m)$ Rahmens durch die Anzahlen k_j der $L(n,s)$ Rahmen genau bestimmt und nicht variabel ist. Darum kann jede der njr_i Einheiten aus der Klasse Cjr_i der $L(n,s)$ Gruppe G_j höchstens:

$$r_i - k_j$$

weitere Kenogramme für die Corestellen einführen, da der Rahmen bereits k_j verschiedene Kenogramme enthält. Die n_{jr_i} Einheiten aus Cjr_i können zusammen also höchstens:

$$(r_i - k_j) \times n_{jr_i}$$

weitere Kenogramme zur Verfügung stellen. Da für jede der $GF(s)$ Gruppen d_j solcher Klassen existieren, können die $\binom{m}{s}$ $L(n,s)$ Einheiten einer $L(n,m)$ Verbundstruktur M-functions mit höchstens:

$$\mathbf{M} = k_J + \sum_{j=1}^{GF(s)} \left\{ \sum_{i=1}^{d_j} (r_i - k_j) \times n_{jr_i} \right\}$$

verschiedenen Kenogrammen erzeugen. ▪

Beispiel: Für die Verbundstruktur $[E, E, E]$ gilt, wie oben festgestellt:

$$k_J = 1$$

für $L(2,2)$ gilt allgemein:

$$k_1 = 1 \qquad k_2 = 2$$

dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= k_J + \sum_{j=1}^{GF(s)} \left\{ \sum_{i=1}^{d_j} (r_i - k_j) \times n_{jr_i} \right\} \\
&= 1 + \left[\sum_{i=1}^{3} (r_i - 1) n_{1r_i} \right] + \left[\sum_{i=1}^{3} (r_i - 2) n_{2r_i} \right] \\
&= 1 + [(1-1)0 + (2-1)3 + (3-1)0] + [0+0+0] \\
&= 1 + 3 + 0 \\
&= \mathbf{4}
\end{aligned}$$

Die Berechnungen für $\mathbf{R} = 2$ und $\mathbf{M} = 4$ decken sich mit der am Beispiel der M-functions von $[E, E, E]$ gewonnenen Beobachtung, daß diese M-functions mindestens zwei ($[EEE]_1$), höchstens jedoch vier verschiedene ($[EEE]_5$) Kenogramme benutzen.

4.3 Die Anzahl der M-functions einer Kategorie

Nach diesen Vorüberlegungen zur Bestimmung des Sättigungsgrades wendet sich Na nun direkt der oben erwähnten Frage nach der Anzahl von M-functions oder Polysemen einer gegebenen Kategorie zu. Diese gesuchte Anzahl nennt sie MP. MP hängt nur vom Grad der komponierten $L(n, s)$ Einheiten und deren möglichen Permutationen ab. Deswegen nimmt MP für alle Verbundstrukturen, deren Einheiten aus den gleichen Klassen stammen, d.h. für alle Kategorien einer Familie, den gleichen Wert an.

4.3.1 MP der Kategorien der Familie A_0

Zunächst werden nur Fälle betrachtet, bei denen alle komponierten Einheiten aus nur einer $L(n, s)$ Gruppe G_j stammen. Die zehn Familien aus Tabelle 2 sind Beispiele für solche Kompositionen. Für einen solchen Fall gilt:

$$\lambda_j = \binom{m}{s}$$

und

$$\sum_{i=1}^{d_j} n_{jr_i} = \lambda_j.$$

Sei nun A_0 eine Familie von Verbundstrukturen, die alle durch die gleiche Verteilung der n_{jr_i} charakterisiert ist:

$$n_{jr_i} = \begin{cases} \lambda_j & \text{für } r_i = k_j \\ 0 & \text{für } r_i \neq k_j. \end{cases}$$

Wobei k_j der Grad der Gruppe ist. Aus den Gleichungen (12) und (13) ergibt sich:

$$\mathbf{R}_0 = k_j = \mathbf{M}_0.$$

Also können die Verbundstrukturen der Familie A_0 nur M-functions erzeugen, für die:

$$\overset{*}{m} = k_j.$$

Da es für diesen Fall für jede solche Kategorie nur eine M-function gibt, ist:

$$MP_0 = 1. \tag{14}$$

Beispiel: Für die Komposition von drei $L(2,2)$ Strukturen zu einem $L(2,3)$ Verbund sind die beiden einzigen Familien, die der Verteilung von A_0 genügen: α^3 und ξ^3. Da α nur eine Struktur I enthält, ist $[I,I,I]$ der einzig mögliche α^3 Verbund. Da $MP_0 = 1$, gibt es für diesen Verbund nur eine einzige M-function $[III]_1$:

$[III]_1$	1	2	3
1	○	○	○
2	○	○	○
3	○	○	○

Als Beispiel für einen ξ^3 Verbund sei hier $[P,K,Q]$ angeführt. Da auch für diesen Verbund die Verteilung A_0 erfüllt ist (also $MP_0 = 1$), gibt es ebenfalls nur eine M-function $[PKQ]_1$:

$[PKQ]_1$	1	2	3
1	○	○	□
2	△	△	△
3	○	△	□

4.3.2 MP der Familie A_1

Betrachten wir als nächstes alle Kategorien der Familie A_1, die durch die folgende Verteilung der njr betimmt ist:

$$n_{jr_i} = \begin{cases} \lambda_j - 1 & \text{für } r_i = k_j \\ 1 & \text{für } r_i = k_j + \Delta r \\ 0 & \text{für } r_i \neq k_j \text{ oder } r_i \neq k_j + \Delta r, \end{cases}$$

mit

$$1 \leq \Delta r \leq d_j - 1.$$

Bezeichne $\mathrm{a}(\lambda_j, 0; \overset{*}{m})$ die Anzahl von M-functions vom Grad $\overset{*}{m}$, die jede Kategorie der Familie A_0 besitzt. Dann ist $\mathrm{a}(\lambda_j - 1, 1; \overset{*}{m})$ die Anzahl von M-functions vom Grad $\overset{*}{m}$ aller Kategorien der Familie A_1. Die induktive Beziehung zwischen $\mathrm{a}(\lambda_j, 0; \overset{*}{m})$ und $\mathrm{a}(\lambda_j - 1, 1; \overset{*}{m}$) ist dann bestimmt durch (Theorem 4.10):

$$\begin{aligned} \mathrm{a}(\lambda_j - 1, 1; \overset{*}{m}) \quad = \quad & \left[\binom{\overset{*}{m} - k_j}{\Delta r} \Delta r!\right] \times \mathrm{a}(\lambda_j, 0; \overset{*}{m}) \\ & + \left[\sum_{q=1}^{\Delta r} \binom{\overset{*}{m} - k_j - q}{\Delta r - q} \times \frac{\Delta r!}{q!} \times \mathrm{a}(\lambda_j, 0; \overset{*}{m} - q)\right] \end{aligned} \tag{15}$$

Beweis: Der erste Summand gibt die Anzahl von möglichen M-functions hergeleitet aus M-functions mit der Verteilung $\{\lambda_j, 0\}$ und dem Grad $\overset{*}{m}$ an. Der zweite Summand bezeichnet die Anzahl von M-functions hergeleitet aus M-functions mit der gleichen Verteilung $\{\lambda_j, 0\}$ aber von niedrigerem Grad ($\overset{*}{m} - q$).

Eine $\{\lambda_j - 1, 1\}$ M-function vom Grad $\overset{*}{m}$ kann aus einer $\{\lambda_j, 0\}$ M-function gleichen Grades erzeugt werden, indem eine der $L(n, s)$ Einheiten vom Grad k_j durch eine Einheit vom Grad r erzetzt wird, wobei:

$$r = k_j + \Delta r \qquad (1 \leq \Delta r \leq d_j - 1).$$

Es werden also Δr weitere Kenogrammsymbole gebraucht. Da die Gesamtanzahl der Kenogramme, $\overset{*}{m}$, nicht verändert werden soll, gibt es:

$$\overset{*}{m} - k_j$$

mögliche Kenogramme. Da die Einheit vom Grad r Δr zusätzliche Kenogramme aus der Menge der $\overset{*}{m} - k_j$ möglichen Kenogramme benutzt, gibt es:

$$\binom{\overset{*}{m} - k_j}{\Delta r}$$

mögliche Auswahlen. Für jede bestimmte Auswahl können die Δr Kenogramme die Einheit vom Grad r auf:

$$\Delta r!$$

verschiedene Arten belegen.

Aus jeder $\{\lambda_j, 0\}$ M-function vom Grad $\overset{*}{m}$ lassen sich demzufolge:

$$\left[\binom{\overset{*}{m} - k_j}{\Delta r} \Delta r!\right]$$

$\{\lambda_j - 1, 1\}$ M-functions generieren. Es gibt $a(\lambda_j, 0; \overset{*}{m})$ M-functions vom Grad $\overset{*}{m}$ mit der Verteilung $\{\lambda_j, 0\}$ und deswegen:

$$\left[\binom{\overset{*}{m} - k_j}{\Delta r}\Delta r!\right] \times a(\lambda_j, 0; \overset{*}{m})$$

verschiedene $\{\lambda_j - 1, 1\}$ M-functions, die auf diese Weise generiert werden können.

Eine $\{\lambda_j - 1, 1\}$ M-function vom Grad $\overset{*}{m}$ kann aber auch aus $\{\lambda_j, 0\}$ M-functions von einem niedrigerem Grad $\overset{*}{m}_1$ abgeleitet werden. Für die zusätzlichen Δr Kenogramme können dann andere als die bereits vorhandenen $\overset{*}{m}_1$ Kenogramme ausgewählt werden. Sei q diese Anzahl neuer Kenogramme, mit $q \leq \Delta r$, dann brauchen nur:

$$\Delta r - q$$

Kenogramme aus der Menge der $(\overset{*}{m} - k_j)$ Kenogramme, die von den $\lambda_j - 1$ restlichen Einheiten benutzt werden, ausgewählt zu werden. Also gibt es:

$$\binom{\overset{*}{m}_1 - k_j}{\Delta r - q}$$

mögliche Auswahlen. Da die q neuen Kenogramme nicht in den anderen Einheiten vorkommen, produzieren Permutationen unter ihnen keine kenogrammatisch verschiedenen M-functions. Deswegen erzeugt die Menge von Δr Kenogrammen nur:

$$\frac{\Delta r!}{q!}$$

kenogrammatisch unterschiedliche Belegungen. Jede der $a(\lambda_j, 0; \overset{*}{m}_1)$ M-functions generiert also:

$$\binom{\overset{*}{m}_1 - k_j}{\Delta r - q} \times \frac{\Delta r!}{q!}$$

$\{\lambda_j - 1, 1\}$ M-functions. Demzufolge können auf diese Weise insgesamt:

$$\binom{\overset{*}{m}_1 - k_j}{\Delta r - q} \times \frac{\Delta r!}{q!} \times a(\lambda_j, 0; \overset{*}{m}_1)$$

M-functions mit einer $\{\lambda_j - 1, 1\}$ Verteilung erzeugt werden. Da die erzeugten M-functions vom Grad $\overset{*}{m}$ sind, ist:

$$\overset{*}{m}_1 + q = \overset{*}{m}$$

und

$$\overset{*}{m}_1 = \overset{*}{m} - q \qquad (1 \leq q \leq \Delta r).$$

Hiermit ergibt sich:

$$\begin{aligned} a(\lambda_j - 1, 1; \overset{*}{m}) &= \left[\binom{\overset{*}{m} - k_j}{\Delta r}\Delta r!\right] \times a(\lambda_j, 0; \overset{*}{m}) \\ &+ \left[\sum_{q=1}^{\Delta r} \binom{\overset{*}{m} - k_j - q}{\Delta r - q} \times \frac{\Delta r!}{q!} \times a(\lambda_j, 0; \overset{*}{m} - q)\right] \end{aligned}$$

■

Die Gesamtanzahl von M-functions, die eine Kategorie vom Typ A_1 enthalten kann, ist dann:

$$MP_1 = \sum_{\overset{*}{m}=\mathbf{R}_1}^{\mathbf{M}_1} \mathrm{a}(\lambda_j - 1, 1; \overset{*}{m}),$$

wobei $\mathbf{R}_1$ und $\mathbf{M}_1$ die untere und obere Grenze für $\overset{*}{m}$ angeben.

4.3.3 MP der Familie A''

Allgemein können, bei gegebenem Δr und a(...) für eine Familie A, die Werte von a(...) für eine abgeleitete Familie A' bestimmt werden, wenn A die folgende Verteilung aufweist:

$$n_{jr} = \begin{cases} \lambda_j - \nu & \text{für } r = k_j \\ \nu & \text{für } r = k_j + \Delta r \\ 0 & \text{für alle anderen Werte } r. \end{cases}$$

Die abgeleitete Familie A' weist dann die folgende Verteilung von Einheiten auf:

$$n_{jr} = \begin{cases} \lambda_j - \nu - 1 & \text{für } r = k_j \\ \nu + 1 & \text{für } r = k_j + \Delta r \\ 0 & \text{für alle anderen Werte } r. \end{cases}$$

Die induktive Beziehung zwischen den beiden Funktionen lautet:

$$\begin{aligned} &\mathrm{a}(\overbrace{\lambda_j - \nu - 1, 0, \ldots, 0, \nu + 1, 0, \ldots, 0}^{d_j \text{ Klassen in } G_j}; \overset{*}{m}) = \\ &\quad \left[\binom{\overset{*}{m} - k_j}{\Delta r} \Delta r!\right] \times \mathrm{a}(\lambda_j - \nu, 0, \ldots, 0, \nu, 0, \ldots, 0; \overset{*}{m}) \\ &\quad + \left[\sum_{q=1}^{\Delta r} \binom{\overset{*}{m} - k_j - q}{\Delta r - q} \times \frac{\Delta r!}{q!} \times \mathrm{a}(\lambda_j - \nu, 0, \ldots, 0, \nu, 0, \ldots, 0; \overset{*}{m} - q)\right] \end{aligned} \tag{16}$$

Sei A'' eine Familie mit der folgenden Verteilung der λ_j Einheiten über den d_j Klassen:

$$n_{jr_1}, n_{jr_2}, \ldots, n_{jr_{d_j}},$$

wobei:

$$\begin{aligned} r_1 &= k_j + (\Delta r)_1 = k_j \qquad (mit(\Delta r)_1 = 0) \\ r_2 &= k_j + (\Delta r)_2 \\ &\vdots \\ r_{d_j} &= k_j + (\Delta r)_{d_j} \end{aligned}$$

und:

$$n_{jr_1} + n_{jr_2} + \ldots + n_{jr_{d_j}} = \lambda_j.$$

Dann ergeben sich die entsprechenden Funktionen a(...) für A'' wie folgt: Um $a(\lambda_j - n_{jr_2}, n_{jr_2}, 0, \ldots, 0; \overset{*}{m})$ aus $a(\lambda_j, 0, \ldots, 0; \overset{*}{m})$ zu erhalten, muß Gleichung (16) n_{jr_2}-mal angewendet werden, wobei dann $\Delta r = (\Delta r)_2$ gesetzt ist. Um nun:

$$a(\lambda_j - n_{jr_2} - n_{jr_3}, n_{jr_2}, n_{jr_3}, 0, \ldots, 0; \overset{*}{m})$$

aus $a(\lambda_j - n_{jr_2}, n_{jr_2}, 0, \ldots, 0; \overset{*}{m})$ zu erzeugen, muß Gleichung (16) n_{jr_3}-mal angewandt werden. Dieser Vorgang wird jetzt entsprechend für $(\Delta r)_4, \ldots, (\Delta r)_{d_j}$ wiederholt, um schließlich:

$$a(n_{jr_1}, n_{jr_2}, \ldots, n_{jr_{d_j}}; \overset{*}{m})$$

zu erhalten.

Die Gesamtanzahl von M-functions einer Kategorie der Familie A'' ist dann:

$$MP = \sum_{\overset{*}{m}=\mathbf{R}}^{\mathbf{M}} a(n_{jr_1}, n_{jr_2}, \ldots, n_{jr_{d_j}}; \overset{*}{m}) \tag{17}$$

4.3.4 Exemplarische Berechnung

Um diese Ergebnisse zu illustrieren, sollen sie in einer einfachen Berechnung demonstriert werden. Betrachtet wird hierzu die Gruppe G_1 von $L(2,2)$ mit den Klassen $C_{11} = \alpha, C_{12} = \beta, C_{13} = \gamma$. G_1 enthält also:

$$d_1 = 3$$

Klassen. Da $\binom{3}{2} = 3$ $L(2,2)$ Einheiten zu einem $L(2,3)$ Verbund komponiert werden und alle verwendeten Einheiten aus G_1 stammen, ist:

$$\lambda_1 = 3.$$

In den Berechnungen zu Tabelle 2 wurde in Gleichung (11):

$$\varphi(3,2) = 10$$

bestimmt. Diese zehn Familien sind in der Tabelle 2 aufgeführt. Die Werte $a(n_{jr_1}, n_{jr_2}, \ldots, n_{jr_{d_j}}; \overset{*}{m})$ für die Kategorien dieser Familien lassen sich dann folgendermassen bestimmen (wir beschränken uns hier auf die Familien α^3, $\alpha^2\beta$ und $\alpha\beta\gamma$):

Für die Familie α^3 ist nach (14):

$$a(3,0,0;1) = 1$$

und

$$a(3,0,0;\overset{*}{m}) = 0 \qquad \text{für } \overset{*}{m} \neq 1,$$

also

$$MP = \sum_{\overset{*}{m}=\mathbf{R}}^{\mathbf{M}} \mathrm{a}(3,0,0;\overset{*}{m}) = \mathbf{1}$$

Die Verteilung für die Familie $\alpha^2\beta$ ist:

$$\begin{array}{ll} n_{1r_1} = 2 & \text{für } r_1 = k_1 = 1 \\ n_{1r_2} = 1 & \text{für } r_2 = k_1 + 1 \\ n_{1r_3} = 0 & \text{für } r_3 = k_1 + 2. \end{array}$$

Nach den Gleichungen (12) und (13) ist:

$$\mathbf{R} = 2$$

und

$$\mathbf{M} = 2$$

also muß gelten:

$$\mathrm{a}(2,1,0;\overset{*}{m}) = 0 \qquad \text{für } \overset{*}{m} \neq 2$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{a}(2,1,0;2) &= \left[\binom{2-1}{1} 1!\right] \mathrm{a}(3,0,0;2) \\ &\quad + \sum_{q=1}^{1} \binom{2-1-q}{1-q} \frac{1!}{q!} \mathrm{a}(3,0,0;2-q) \\ &= \binom{1}{1} 1! \times 0 + \binom{0}{0} \frac{1!}{1!} \mathrm{a}(3,0,0;1) \\ &= 0 + 1 \\ &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Wobei $\Delta r = 1$.Also ist:

$$\begin{aligned} MP &= \sum_{\overset{*}{m}=\mathbf{R}}^{\mathbf{M}} \mathrm{a}(2,1,0;\overset{*}{m}) \\ &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Für die Familie $\alpha\beta\gamma$ ist die Verteilung der λ_1 Einheiten über den d_j Klassen:

$$\begin{array}{ll} n_{1r_1} = 1 & \text{für } r_1 = k_1 = 1 \\ n_{1r_2} = 1 & \text{für } r_2 = k_1 + 1 \\ n_{1r_3} = 1 & \text{für } r_3 = k_1 + 2. \end{array}$$

Die Werte $\mathrm{a}(1,1,1;\overset{*}{m})$ werden aus $\mathrm{a}(2,1,0;\overset{*}{m})$ hergeleitet, wobei eine der beiden α Einheiten (vom Grad $r = 1$) durch eine γ Einheit vom Grad $r = 3$ ersetzt wird. Also ist:

$$\Delta r = 2.$$

Wir erhalten:

$$\mathbf{R} = 3$$

und

$$\mathbf{M} = 4.$$

Also:

$$3 \leq \overset{*}{m} \leq 4.$$

Deswegen ist:

$$\mathrm{a}(1,1,1;\overset{*}{m}) = 0 \qquad \text{für } \overset{*}{m} < 3 \text{ und } \overset{*}{m} > 4$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{a}(1,1,1;3) &= \binom{3-1}{2} 2!\mathrm{a}(2,1,0;3) \\
&\quad + \sum_{q=1}^{2} \binom{3-1-q}{2-q} \frac{2!}{q!} \mathrm{a}(2,1,0;3-q) \\
&= \binom{2}{2} 2! \times 0 \\
&\quad + \binom{1}{1} \frac{2!}{1!} \mathrm{a}(2,1,0;2) \\
&\quad + \binom{0}{0} \frac{2!}{2!} \mathrm{a}(2,1,0;1) \\
&= 0 + (2 \times 1) + (1 \times 0) \\
&= \mathbf{2}
\end{aligned}$$

sowie:

$$\begin{aligned}
\mathrm{a}(1,1,1;4) &= \binom{4-1}{2} 2!\mathrm{a}(2,1,0;4) \\
&\quad + \sum_{q=1}^{2} \binom{4-1-q}{2-q} \frac{2!}{q!} \mathrm{a}(2,1,0;4-q) \\
&= \binom{3}{2} 2! \times 0 \\
&\quad + \binom{2}{1} \frac{2!}{1!} \mathrm{a}(2,1,0;3) \\
&\quad + \binom{1}{0} \frac{2!}{2!} \mathrm{a}(2,1,0;2) \\
&= 0 + (2 \times 2 \times 0) + (1 \times 1) \\
&= \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Also ist:

$$MP = \sum_{\overset{*}{m}=\mathbf{R}}^{\mathbf{M}} \mathrm{a}(1,1,1;\overset{*}{m})$$

$$= 2+1$$
$$= \mathbf{3}.$$

Die Struktur $[I, E, T_E]$ ist ein Beispiel für einen Verbund vom Typ $\alpha\beta\gamma$. Für $[I, E, T_E]$ existieren $MP = 3$ verschiedene M-functions $[IET_E]_1$, $[IET_E]_2$ und $[IET_E]_3$:

$[IET_E]_1$	1 2 3
1	○ ○ △
2	○ ○ △
3	□ △ ○

$[IET_E]_2$	1 2 3
1	○ ○ □
2	○ ○ △
3	△ △ ○

$[IET_E]_3$	1 2 3
1	○ ○ □
2	○ ○ △
3	★ △ ○

Entsprechend unseren Berechnungsergebnissen bestehen die beiden ersten M-functions aus drei verschiedenen Kenogrammen (○, △, □) und die dritte aus vier Kenogrammen (○, △, □, ★).

4.3.5 *MP* der Kategorien der allgemeinen Familie *A*

In diesem Beispiel haben wir die Werte für $a(1,1,1;\overset{*}{m})$ aus $a(2,1,0;\overset{*}{m})$ hergeleitet und nicht direkt aus $a(3,0,0;\overset{*}{m})$. Der Grund hierfür liegt in der Beschaffenheit der Rekursionsgleichung (16). Wir müssen also feststellen, daß Gleichung (16) eine Familie A' nur dann aus der Familie A herleiten kann, wenn beide Familien den folgenden Anforderungen genügen:

(a) Alle Werte n_{jr_i} außer zweien (n_{jr_a}, n_{jr_b}) müssen identisch sein.

(b) Sind für die Familie A diese beiden Werte n_{jr_a} und n_{jr_b} und für A' n'_{jr_a} und n'_{jr_b}, dann muß gelten:

$$n'_{jr_a} = n_{jr_a} - 1$$

und

$$n'_{jr_b} = n_{jr_b} + 1.$$

(c) $r_a = k_j$ und $r_b = k_j + \Delta r$.

Im Weiteren wird gezeigt werden, daß trotz dieser Einschränkung für alle möglichen Familien A' Herleitungen nach Gleichung (16) existieren.

In den bisherigen berlegungen wurde davon ausgegangen, daß alle zu komponierenden Einheiten aus nur einer Gruppe G_j stammen. Na erweitert jetzt ihre berlegungen um Fälle, bei denen Einheiten aus zwei Gruppen komponiert werden. Da $L(2,2)$ zwei Rahmengruppen enthält führt dies ihre Arbeit, zumindest hinsichtlich $L(2,2)$, zu einem Abschluß.

Eine Familie A_{00} enthalte Einheiten aus zwei Gruppen G_1 und G_2 mit der folgenden Verteilung:

$$n_{1r} = \begin{cases} \lambda_1 & \text{für } r = k_1 \\ 0 & \text{für alle anderen Werte } r, \end{cases}$$

$$n_{2r} = \begin{cases} \lambda_2 & \text{für } r = k_2 \\ 0 & \text{für alle anderen Werte } r, \end{cases}$$

dann gilt für jede Familie vom Typ A_{11} mit der Verteilung:

$$n_{2r} = \begin{cases} \lambda_2 & \text{für } r = k_2 \\ 0 & \text{für alle anderen Werte } r, \end{cases}$$

$$n_{1r} = \begin{cases} n_{1r_1} & \text{für } r = r_1 \\ n_{1r_2} & \text{für } r = r_2 \\ \vdots & \\ n_{1r_{d_1}} & \text{für } r = r_{d_j} \end{cases}$$

weiterhin Gleichung (16) (Theorem 4.11).

Beweis: A_{01} repräsentiere Familien mit folgender Verteilung:

$$n_{1r} = \begin{cases} \lambda_1 - 1 & \text{für } r = k_1 \\ 1 & \text{für } r = k_1 + 1 \\ 0 & \text{für alle anderen Werte } r, \end{cases}$$

$$n_{2r} = \begin{cases} \lambda_2 & \text{für } r = k_2 \\ 0 & \text{für alle anderen Werte } r. \end{cases}$$

A_{01} unterscheidet sich von A' nur durch die zusätzlichen λ_2 Einheiten aus G_2 vom Grad k_2. Die Anwesenheit dieser zusätzlichen Einheiten betrifft aber nur die Werte $\mathbf{M}_{01}$ und $\mathbf{R}_{01}$. Da A_{00} und A_{01} den drei Anforderungen (a), (b), (c) genügen, gilt für sie Gleichung (16). Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung mit verschiedenen Werten für Δr können die Werte $\mathrm{a}(\ldots;\overset{*}{m})$ für die Kategorien der Familien A_{11} aus den Werten für A_{00} abgeleitet werden. ▪

Es ist möglich $\mathrm{a}(\ldots;\overset{*}{m})$ für Kategorien einer Familie A mit der Verteilung $n_{1r_1}, n_{1r_2}, \ldots, n_{1r_{d_1}}, n_{2r_1}, n_{2r_2}, \ldots, n_{2r_{d_2}}$ aus den Werten $\mathrm{a}(\ldots;\overset{*}{m})$ für A_{00} durch wiederholte Anwendung von Gleichung (16) zu berechnen. Der Beweis hierfür verläuft analog zum vorhergehenden.

Die Werte $\mathrm{a}(\ldots;\overset{*}{m})$ für Kategorien mit beliebiger Verteilung der n_{jr} lassen sich aus den Werten $\mathrm{a}(\ldots;\overset{*}{m})$ für Kategorien mit der Verteilung:

$$n_{jr_i} = \begin{cases} \lambda_j & \text{für } r_i = k_j \\ 0 & \text{für } r_i \neq k_j \end{cases} \qquad \text{mit } 1 \leq j \leq GF(s)$$

durch mehrfache Anwendung der Formel (16) berechnen.

Die Gesamtanzahl von M-functions, die eine gegebene Kategorie reprä-sentiert, ist also durch:

$$MP = \sum_{\overset{*}{m}=\mathbf{R}}^{\mathbf{M}} \mathrm{a}(n_{1r_1}, n_{1r_2}, \ldots, n_{1r_{d_1}}, n_{2r_1}, n_{2r_2}, \ldots, n_{2r_{d_2}}; \overset{*}{m}) \tag{18}$$

gegeben.

G_J	$g\{3_{k_J}\}$	φ	Familie	σ	MP		R	M
G_1	1 ○○○	10	α^3	1		1	1	1
			$\alpha^2\beta$	9		1	2	2
			$\alpha^2\gamma$	3		1	3	3
			$\alpha\beta^2$	27	1+1 =	2	2	3
			$\alpha\beta\gamma$	18	2+1 =	3	3	4
			$\alpha\gamma^2$	3	2+4+1 =	7	3	5
			β^3	27	1+3+1 =	5	2	4
			$\beta^2\gamma$	27	4+5+1 =	10	3	5
			$\beta\gamma^2$	9	4+14+8+1 =	27	3	6
			γ^3	1	4+32+38+12+1 =	87	3	7
G_2	3 ○○△ ○△○ ○△△	18	$\alpha\xi^2$	16		1	2	2
			$\alpha\xi\rho$	40		1	3	3
			$\alpha\xi\phi$	8		1	4	4
			$\alpha\rho^2$	25	1+1 =	2	3	4
			$\alpha\rho\phi$	10	2+1 =	3	4	5
			$\alpha\phi^2$	1	2+4+1 =	7	4	6
			$\beta\xi^2$	48	1+1 =	2	2	3
			$\beta\xi\rho$	120	2+1 =	3	3	4
			$\beta\xi\phi$	24	3+1 =	4	4	5
			$\beta\rho^2$	75	2+4+1 =	7	3	5
			$\beta\rho\phi$	30	6+6+1 =	13	4	6
			$\beta\phi^2$	3	6+18+9+1 =	34	4	7
			$\gamma\xi^2$	16	2+1 =	3	3	4
			$\gamma\xi\rho$	40	2+4+1 =	7	3	5
			$\gamma\xi\phi$	8	6+6+1 =	13	4	6
			$\gamma\rho^2$	25	2+10+7+1 =	20	3	6
			$\gamma\rho\phi$	10	12+24+10+1 =	47	4	7
			$\gamma\phi^2$	1	12+60+54+14+1 =	141	4	8
G_3	1 ○△□	10	ξ^3	64		1	3	3
			$\xi^2\rho$	240	1+1 =	2	3	4
			$\xi^2\phi$	48	2+1 =	3	4	5
			$\xi\rho^2$	300	1+3+1 =	5	3	5
			$\xi\rho\phi$	120	4+5+1 =	10	4	6
			$\xi\phi^2$	12	4+14+8+1 =	27	4	7
			ρ^3	125	1+7+6+1 =	15	3	6
			$\rho^2\phi$	75	8+19+9+1 =	37	4	7
			$\rho\phi^2$	15	8+46+46+13+1 =	114	4	8
			ϕ^3	1	8+100+184+98+18+1 =	409	4	9

Table 4: Analyse der $L(2,3)$ Komposition nach [Na64], p.112f.

5 Fazit

Die gewonnen Ergebnisse stellt Na in einer abschließenden Tabelle zusammen, von der hier aus Platzgründen nur der Teil für die Komposition von $L(2,3)$ Strukturen wiedergegeben ist. Einige kleinere Berechnungsfehler wurde ohne weiteren Hinweis korrigiert.

Für jede der $GF(n)$ Rahmengruppen G_J ist die Anzahl von Rahmen, die sie enthält ($g\{m_{k_J}\}$), sowie die Anzahl φ von Familien in dieser Gruppe angegeben. In der nächsten Spalte sind alle Familien aufgeführt. Für jede dieser Familien ist die Anzahl σ von Verbundstrukturen, die sie enthält, berechnet[3]. Für jede Kategorie sind die Werte **R** und **M** sowie die Anzahl von M-functions MP angegeben.

Fassen wir abschliessend Na's Analyse der $L(n,m)$ Systeme kurz zusammen: Ein $L(n,m)$ System ist die Menge aller:

$$\sum_{i=1}^{n^m} S(n^m, i)$$

TNF-Kenogrammsequenzen der Länge n^m (M-functions). Ein solches System wird anhand der Rahmenstruktur der M-functions in $GF(m)$ Rahmengruppen aufgeteilt. Die M-functions in diesen Gruppen werden entsprechend der Verteilung der λ_j $L(n,s)$ Einheiten über den d_j Klassen von G_j in φ Familien eingeteilt. Jede dieser Familien enthält σ Kategorien (Verbundstrukturen). Jede Kategorie enthält MP M-functions, von denen a$(\ldots;\overset{*}{m})$ vom Grad $\overset{*}{m}$ sind, mit $\mathbf{R} \leq \overset{*}{m} \leq \mathbf{M}$.

6 Implementierung der Algorithmen

Abschließend werden nun die entwickelten Formeln und Algorithmen implementiert. Als Implementierungssprache wurde Standard ML gewählt, das sich durch seine Funktionalität und Modularität auszeichnet. In ML ist es möglich, Programme in direkter Anlehnung an den mathematischen Formalismus zu entwerfen.

Die Funktion

```
fun sum from to f=
   if (from > to) then 0
   else (f from) + sum  ( from + 1) to f;
```

berechnet die Summenformel $\sum_{k=from}^{to} f(k)$. Die Summe $\sum_{k=0}^{100} k^2$ ergibt sich beispielsweise als:

```
-sum 0 100 (fn k => k*k);
>338350 : int
```

Die Funktion:

[3]Die tatsächliche Anzahl von Verbundstrukturen ergibt sich aus $\sigma \times g\{m_{k_J}\}$. (s.a. Die Anmerkung auf Seite 11).

```
fun S (n,1) = 1
   |S (n,k) =
     if k>n then 0
     else if k=n then 1
     else S(n-1,k-1) + k*S(n-1,k);
```

berechnet die Stirlingzahl der zweiten Art nach [And65]. Beispielsweise ergibt:

```
-S(10,5);
>42525 : int
```

Die Anzahl der Rahmen eines $L(n,m)$ Systems wird nach Gleichung (1) angegeben durch

$$NF(m) = \sum_{k=1}^{m} S(m,k).$$

Als ML-Funktion notiert:

```
fun NF m = sum 1 m (fn k => S(m,k));
```

Für ein $L(2,4)$ System ergibt sich die Anzahl der Rahmen als:

```
-NF 4;
>15 : int
```

Die Anzahl der Partitionen $P(n,k)$ von n Objekten über k Objektklassen wird nach [Sch67a] berechnet durch:

```
fun P (n,1) = 1
   |P (n,k) =
     if k>n then 0
     else if k=n then 1
     else P(n-1,k-1) + P(n-k,k);
```

Beispielsweise ergibt:

```
- P(10,5);
> 7 : int
```

Die Anzahl von Rahmengruppen eines $L(n,m)$ Systems berechnet sich nach Gleichung (2) als:

$$GF(m) = \sum_{k=1}^{m} P(m,k).$$

Als ML-Funktion notiert:

```
fun GF m = sum 1 m (fn k => P(m,k));
```

Für ein $L(2,4)$ System ergibt sich die Anzahl der Rahmengruppen als:

```
- GF 4;
> 5 : int
```

Die Fakultätsfunktion $n!$ ist durch folgende ML-Funktion bestimmt:

```
fun fak 0=1
   |fak n= n * fak (n-1);

- fak 10;
> 3628800 : int
```

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ wird berechnet durch die ML-Funktion:

```
fun choose n k=
   (fak n) div ((fak k)* fak (n-k));

- choose 4 2;
> 6 : int
```

Die Potenzfunktion m^n wird angegeben durch die ML-Funktion:

```
fun powers m n=
   if n=0 then 1
   else if n=1 then m
   else m*(powers m (n-1));

- powers 3 5;
> 243 : int
```

Die durch Gleichung (10) bestimmte Funktion σ wird durch die folgende ML-Funktion implementiert:

```
fun sigma n11 n12 n13 n22 n23 n24=
  let
   val l1=n11+n12+n13;
   val l2=n22+n23+n24;
  in
    ((fak l1) div ((fak n11)*(fak n12)*(fak n13)))
   * (powers 3 n12) *
    ((fak l2) div ((fak n22)*(fak n23)*(fak n24)))
   * (powers 4 n22) * (powers 5 n23)
  end;
```

Die sechs Variablen `n11, n12, n13, n22, n23, n24` repräsentieren die Verteilung der $\lambda_1 + \lambda_2$ Einheiten über den sechs $L(2,2)$ Klassen $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \rho, \phi$. Um also beispielsweise $\sigma(\beta\xi\rho)$ zu berechnen, wird eingegeben:

```
- sigma 0 1 0 1 1 0;
```

Das Ergebnis lautet:

```
> 120 : int
```

Die Hilffunktion `max` berechnet das Maximum einer Liste von Zahlen:

```
fun max []=0
   |max [x]=x
   |max (x::xs)=
     let
      val restmax = max xs;
     in
      if (x > restmax) then x else restmax
     end;
```

Der Grad einer $L(2,2)$ Gruppe G_j ist durch k_j bestimmt:

```
fun k n= n;
```

Der minimale Sättigungsgrad **R** einer Komposition von Morphogrammen ist durch Gleichung (12) bestimmt. Implementiert wird **R** durch:

```
fun R n11 n12 n13 n22 n23 n24=
  let
   val kJ = if (n11+n12+n13)=3 then 1
            else if (n22+n23+n24)=3 then 3
            else 2;
  in
   max (kJ::(map (fn (n,j,r) => if (n=0) then 0
                                 else (k j)+r)
                 [(n11,1,0),(n12,1,1),(n13,1,2),
                  (n22,2,0),(n23,2,1),(n24,2,2)]))
  end;
```

Der maximale Sättigungsgrad **M** einer Komposition ist durch Gleichung (13) bestimmt. Implementiert wird er durch:

```
fun M n11 n12 n13 n22 n23 n24=
  let
   val kJ = if (n11+n12+n13)=3 then 1
            else if (n22+n23+n24)=3 then 3
            else 2;
  in
   kJ + n12 + (2*n13) + n23 + (2*n24)
  end;
```

Auch die Funktionen R und M benötigen wieder die Angabe der Verteilung der Einheiten über den sechs Gruppen:

```
- R 0 1 0 1 1 0;
> 3 : int
- M 0 1 0 1 1 0;
> 4 : int
```

Nach der Bedingung (c) ist $\Delta r = r_b - k_j$. Dieser Zusammenhang wird berechnet durch:

```
fun dr n2 n3=
  if n3<>0 then 2
  else if n2<>0 then 1
  else 0;
```

Die Werte von a(...) für eine Familie vom Typ A' sind durch Gleichung (16) bestimmt. Berechnet wird diese Funktion durch:

```
exception A
fun a1 (n1,n2,n3,m,j) =
   if (j=1) andalso
      ((m<(R n1 n2 n3 0 0 0)) orelse (m>(M n1 n2 n3 0 0 0)))
      then 0
   else if j=2 andalso
          ((m<(R 0 0 0 n1 n2 n3)) orelse (m>(M 0 0 0 n1 n2 n3)))
      then 0
   else if n1=n1+n2+n3 then 1
   else if n3<>0 then
    sum 0 (dr n2 n3)
        (fn q => (choose (m-(k j)-q) ((dr n2 n3)-q))
               *((fak(dr n2 n3)) div (fak q))
               *a1(n1+1,n2,n3-1,m-q,j))
   else
     sum 0 (dr n2 n3)
        (fn q => (choose (m-(k j)-q) ((dr n2 n3)-q))
               *((fak(dr n2 n3)) div (fak q))
               *a1(n1+1,n2-1,n3,m-q,j));
```

Die folgende ML-Funktion:

```
exception B;
fun a (n11,n12,n13,n22,n23,n24,m) =
 let
   val J = if (n11+n12+n13)=3 then 1
           else if (n22+n23+n24)=3 then 3
           else if (n11+n12+n13+n22+n23+n24)=3 then 2
           else raise A;
 in
   if (m<(R n11 n12 n13 n22 n23 n24)) orelse (m>(M n11 n12 n13 n22 n23 n24))
      then 0
   else if J=1 then a1(n11,n12,n13,m,1)
   else if J=3 then a1(n22,n23,n24,m,2)
   else if n11=1 andalso n22=2 then 1
   else if (n12>0 orelse n13>0) then
     sum 0 (dr n12 n13)
         (fn q => (choose (m-(k 1)-q) ((dr n12 n13)-q))
                *((fak(dr n12 n13)) div (fak q))
                *a(n11+1,if n12=0 then 0 else n12-1,
                         if n13=0 then 0 else n13-1,
                   n22,n23,n24,m-q))
   else if (n24>0) then
     sum 0 (dr n23 n24)
         (fn q => (choose (m-(k 2)-q) ((dr n23 n24)-q))
                *((fak(dr n22 n24)) div (fak q))
                *a(n11,n12,n13,n22+1,n23,if n24=0 then 0 else n24-1,m-q))
   else if (n23>0) then
     sum 0 (dr n23 n24)
         (fn q => (choose (m-(k 2)-q) ((dr n23 n24)-q))
                *((fak(dr n22 n24)) div (fak q))
                *a(n11,n12,n13,n22+1,if n23=0 then 0 else n23-1,n24,m-q))
   else raise B
  end;
```

berechnet die Werte für a(...) der Familien vom allgemeinen Typ A. Der Wert a(...;6) für die Familie $\gamma\phi^2$ wird durch die folgende Applikation berechnet:

```
- a(0,0,1,0,0,2,6);
> 54 : int
```

Die Hilfsfunktion:

```
exception Fromto;
fun fromto n m =
```

```
  if n>m+1 then raise Fromto
  else if n=m+1 then nil
  else n::fromto (n+1) m;
```

erzeugt eine Liste der ganzen Zahlen von `n` bis `m`.

Die Funktion MP für $L(2,3)$ ist nach Gleichung (18) gegeben als

$$MP = \sum_{\mathring{m}=\mathbf{R}}^{\mathbf{M}} \mathtt{a}(n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{22}, n_{23}, n_{24}; \overset{*}{m}).$$

Implementiert wird MP durch:

```
fun MP n11 n12 n13 n22 n23 n24=
 let
  val alist =
       map (fn m => a(n11,n12,n13,n22,n23,n24,m))
           (fromto (R n11 n12 n13 n22 n23 n24) (M n11 n12 n13 n22 n23 n24))
 in
  (map (fn x => (print x ; print " ")) alist;
  sum (R n11 n12 n13 n22 n23 n24) (M n11 n12 n13 n22 n23 n24)
      (fn m => a(n11,n12,n13,n22,n23,n24,m)))
 end;
```

Die Eingabe:

```
- MP 0 0 0 0 0 3;
```

berechnet MP für die Familie ϕ^3:

```
8 100 184 98 18 1
> 409 : int
```

References

[And65] Andrew, A.M. und Foerster, H.v.: *Table of Stirling numbers of the second kind.* BCL-Report No.6, Urbana, 1965

[Dit82] Ditterich, J.: *Logikwechsel und Theorie selbstreferentieller Systeme.* In: Hombach, D.(Hg.): *Zeta 01. Zukunft als Gegenwart.* (S.120-155), Berlin, 1982, Verlag Rotation

[Dit86] Ditterich, J., Kaehr, R.: *Einübung in eine andere Lektüre. Diagramm einer Rekonstruktion der Güntherschen Theorie der Negativsprachen.* In: Philosophisches Jahrbuch, 86. Jg., 2. Halbband, Freiburg und München, 1979, S. 385-408

[Gue78] Günther, G.: *Idee und Grundri einer nicht-aristotelischen Logik. Die Idee und ihre philosophischen Voraussetzungen.* 2. Auflage, Hamburg, 1978, Verlag Felix Meiner

[Gue80] Günther, G.: *Beiträge zur Grundlegung einer operationsfähigen Dialektik.* Bd. 1-3, Hamburg, 1976-1980, Verlag Felix Meiner

[Gue80a] Günther, G.: *Cognition and Volition.* In: [Gue80] Bd.2

[Gue80b] Günther, G.: *Cybernetic Ontology and Transjunctional Operations.* In: [Gue80] Bd.1

[Gue80c] Günther, G.: *Logik, Zeit, Emanation und Evolution.* In: [Gue80] Bd.3

[Heg86] Hegel, G.W.F.: *Wissenschaft der Logik I und II.* Frankfurt a.M., 1986, Suhrkamp

[Hou88] Houben, G. und Nitsch, F.: *Entwicklung einer Programmierumgebung zur Behandlung polykontexturaler Systeme.* Dipl. Arbeit, Universität d. Bundeswehr, FB Informatik, München, 1988

[Kae74] Kaehr, R., Seehusen, J., Thomas, G.: *Deskriptive Morphogrammatik.* FEoLL-GmbH, Paderborn 1974

[Kae78] Kaehr, R.: *Materialien zur Formalisierung der dialektischen Logik und der Morphogrammatik 1973-1975.* In: [Gue78], Anhang

[Kae80] Kaehr, R.: *Neue Tendenzen in der KI-Forschung.* Stiftung Warentest, Berlin, 1980

[Kae81] Kaehr, R.: *Das graphematische Problem einer Formalisierung der transklassischen Logik Gotthard Günthers.* In: Beyer, W.R.(Hg.): *Die Logik des Wissens und das Problem der Erziehung.* Hamburg, 1981, Verlag Felix Meiner

[Kae82] Kaehr, R.: *Einschreiben in Zukunft*. In: Hombach, D.(Hg.): *Zeta 01. Zukunft als Gegenwart*. Berlin, 1982, Verlag Rotation

[Kro86] Kronthaler, E.: *Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten*. Frankfurt a.M., 1986, Peter Lang Verlag

[Na64] Na, H.S.H., Foerster, H.v., Günther, G.: *On structural analysis of many valued logic*. Department of Electrical Engineering, University of Illinois, 1964

[Nie88] Niegel, W.: *Introduction to Polycontexturality*. Ms, Universität d. Bundeswehr, FB Informatik, München, 1988

[Pfa88] Pfalzgraph, J.: *Zur Formalisierung polykontexturaler Logiksysteme*. ESG, München, 1988

[Sch67a] Schadach, D.J.: *A classification of mappings between finite sets and some applications*. BCL-Report No. 2.2, Urbana, 1967

[Sch67b] Schadach, D.J.: *A system of Equivalence Relations and generalized Arithmetic*. BCL-Report No. 4.1, Urbana, 1967

[Tho85] Thomas, G.G.: *Introduction to Kenogrammatics*. In: Proceedings of the 13th Winterschool on Abstract Analysis, Section of Topology, Serie II numero 11-1985, Palermo, 1985

Diese Arbeit wurde mit Mitteln der Volkswagen Stiftung unterstützt