Gotthard Günther [*]

Natürliche Zahl und Dialektik

Seit einigen Jahren mehren sich in der Fachliteratur, die Stimmen, die darauf hinweisen, dass die heutige Mathematik den Anforderungen nicht mehr genügt, die durch neu entstehende Wissenschaftsgebiete an sie gemacht werden. Als bekanntester Repräsentant solcher Ansprüche ist die Kybernetik zu nennen, insofern als sie sich mit der Theorie biologischer Systeme befasst. Es wird betont, dass jenes Phänomen, das wir als Leben in organischen Systemen bezeichnen, von einer solchen enormen strukturellen Komplexität ist, dass die gegenwärtige Mathematik nicht im entferntesten in der Lage sei, ihm mit adäquaten Methoden zu begegnen. Überdies besitze der Operationsmodus eines organischen Systems dialektischen Charakter (Hector C. Sabelli). Eine Mathematik aber, die dialektischen Eigenschaften Rechnung trägt, kann vorläufig noch nicht entwickelt werden, solange nicht die Frage geklärt ist, ob und in welcher Form die natürliche Zahl und der ihr zugeordnete Abzählprozess dialektische Momente enthält.

Die Aufgabe, eine dialektische Struktur in der linearen Folge der natürlichen Zahlen aufzuweisen, erscheint nicht gerade einladend, wenn man liest, was Hegel zum Thema beigetragen hat. Eine der verhängnisvollsten Erbschaften, die dieser Denker aus der abendländischen Wissenschaftstradition übernommen hat, ist die Überzeugung von der grundsätzlichen Wesensfremdheit von Begriff und Zahl.

"Die Zahl ist eben", so lesen wir in der Phänomenologie des Geistes, "die gänzlich ruhende, tote und gleichgültige Bestimmtheit, an welcher alle Bewegung und Beziehung erloschen ist, und welche die Brücke zu dem lebendigen Dasein ... abgebrochen hat"[1]. Die arithmetischen Verhältnisse nehmen also an der dialektischen Selbstbewegung des Begriffes nicht teil und je weiter der Prozess des spekulativen Denkens sich erst in seine antithetischen Momente auseinander legt und dann dieselben wieder vermittelt, desto größer und tiefer wird der Abstand zwischen Begriff und Zahl. Ganz konsequent heißt es dann auch in dem Kapitel über das Quantum in der Großen Logik: "Je reicher an Bestimmtheit und damit an Beziehung die Gedanken werden, desto verworrener einerseits und desto willkürlicher und sinnleerer andererseits wird ihre Darstellung in solchen Formen, als die Zahlen sind. Das Eins, das Zwei, das Drei, das Vier, Henas oder Monas, Dyas, Trias, Tetraktys liegen noch den ganz e i n f a c h e n und a b s t r a k t e n Begriffen nahe; aber wenn Zahlen zu konkreten Verhältnissen übergehen sollen, so ist es vergeblich, sie noch dem Begriffe nahe erhalten zu wollen"[2].

Nach diesen und ähnlichen Bemerkungen wie etwa die, "dass die Zahl eine unpassende Form ist, um Begriffsbestimmungen darein zu fassen", und der gleich darauf folgenden:

---

* Erstveröffentlichung in: Hegel-Jahrbuch (W.R. Beyer, hrsg.), Verlag Anton Hain, Meisenheim 1972, p. 15-32.
abgedruckt in: Gotthard Günther, Beiträge zur Grundlegung einer operationsfähigen Dialektik, Band 2, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1979, p. 265-282.

1 Hegel: WW II (Glockner), p. 223.

2 Hegel: WW IV (Glockner), p.258 f.

"... die Zahl, da sie das Eins zum Prinzip hat, macht die gezählten zu ganz abgesonderten und einander ganz gleichgültigen"[3] sollte man eigentlich an der Aufgabe verzweifeln, dialektische Strukturen im System der natürlichen Zahlen aufzudecken. Aber Hegel widerspricht sich selbst. Denn im System der Philosophie finden wir den überraschenden Passus: "Man könnte noch weiter den Gedanken einer philosophischen Mathematik fassen, welche dasjenige aus Begriffen erkennte, was die gewöhnliche mathematische Wissenschaft aus vorausgesetzten Bestimmungen nach der Methode des Verstandes ableitet"[4]. Schließlich ist der dialektische Charakter der natürlichen Zahl im Hegelschen System fast mit den Händen zu greifen in dem Kapitel über das Quantum in der Großen Logik, wo von der triadischen Struktur der Eins die Rede ist, insofern als dieselbe erstens als "auf sich beziehende", zweitens als "umschließende" und schließlich drittens als "anderes ausschließende Grenze" gedeutet werden muss"[5].

Da die Aussagen, die für diejenigen, die gegen den dialektischen Charakter der natürlichen Zahl sprechen, sich, was ihr theoretisches Gewicht anbetrifft, so ziemlich die Waage halten, wollen wir das Problem von einer Seite angreifen, die zwar relativ unabhängig von Hegels Zahlenspekulationen ist, die aber direkt auf Hegel hinführt.

Jedermann weiß, dass man beliebig viele Elemente gegebener Klassen etwa von Bäumen oder Häusern abzählen kann. Ebenso kann man Eigenschaften zählen. Wir sprechen z. B. von einem Vierfarben-Druck. Und man kann auch Vorgänge zählen, etwa die Pendelschläge einer Wanduhr. Aber wir wissen weiter, dass man Dinge verschiedener Gegenstandsklassen oder Eigenschaften und Vorgänge nicht deratig zusammenzählen kann, dass in ihrer Summation die Dinge eben Dinge bleiben, die Eigenschaften ihre Eigenschaftlichkeit behalten und die Vorgänge nichts von ihrem kategorialen Charakter als Ereignisse verlieren. Man hat uns gelehrt, dass man solche diversen Objektivitäten nur ganz vage als etwas überhaupt in einem kontinuierlichen Zählprozess addieren kann. Ihre kategorialen Differenzen verschwinden in der arithmetischen Summation völlig.

Wir wollen nun einen solchen Rahmen, der absolut indifferent gegenüber allen beschränkten kategorialen Differenzen ist, die wir mit solchen Termini wie Gegenstand, Eigenschaft oder Vorgang bezeichnet haben, eine Universalkontextur nennen. Unter dem Terminus 'Universalkontextur' verstehen wir im Gegensatz zu dem, was man im gewöhnlichen Sprachgebrauch einen (inhaltlich sinnhaften) Kontext nennt, einen ontologischen Leerbereich von totaler Allgemeinheit und unbeschränkter Inhaltskapazität, in dem der Satz vom ausgeschlossenen Dritten derart gilt, dass für den Gegensatz von Affirmation und Negation kein übergeordneter materialer Bestimmungsgesichtspunkt mehr angegeben werden kann. Wenn uns nun gelehrt wurde, dass man Data, die aus unterschiedlichen Klassen stammen – wobei die Zahl der Klassen unbeschränkt ist nur als 'etwas überhaupt' zusammenzählen könne, so hieß das nichts anderes, als dass alle formalen Zahlenmanipulationen nur in dem grauen Neutrum einer solchen Universalkontextur stattfinden können, in der die Differenzen der einzelnen kategorialen Individualkontexte ausgelöscht und untergegangen sind. Die

[3] Hegel: WW V (Glockner), p. 52.

[4] Hegel: WW IX (Glockner), p. 84.

[5] Hegel: WW IV (Glockner), p.242.

klassische Metaphysik behauptet nun, dass alle inhaltlich bestimmten Einzelkontexte, die wir in unserer Welt unterscheiden können, sich letzten Endes in einer Universalkontextur zusammenfassen lassen. Die philosophische Tradition nennt diese individuellen Klassenunterschieden gegenüber neutrale Kontextur Sein-überhaupt. Sie ist unter anderem der logische Ort für alle arithmetischen Operationen.

Nun behauptet die klassische Tradition aber weiterhin, dass diese Universalkontextur die einzige ihrer Art ist und dass es sinnlos ist, von Universalkontexturen im Plural zu reden[[6]]. Anders gesagt: das Universum, in dem wir leben, ist gemäß unserer bis auf die Griechen zurückzudatierenden Wissenschaftstradition ontologisch gesprochen ein monokontexturaler Weltzusammenhang. Dieser Mono-kontexturalität entspricht eine Zahlenordnung, in der jede natürliche Zahl, die auf 1 folgt, nur e i n e n unmittelbaren Vorgänger und e i n e n unmittelbaren Nachfolger haben kann. Diesen uns altvertrauten und selbstverständlichen Zahlenablauf wollen wir von jetzt ab, daerdurchdie bekannten Peanoschen Zahlenaxiome definiert werden kann, kurz eine Peano-Folge nennen.

Von hier aus gesehen besteht die entscheidende wissenschaftstheoretische und dialektische Wendung der Hegelschen Philosophie darin, dass sie die klassische Mono-kontexturalitäts-These verneint und in der Logik zu demonstrieren versucht, dass die Wirklichkeit, in der wir leben, von einer unendlichen Vielfalt konkurrierender Universalkontexturen durchsetzt ist. Der dialektische Charakter einer gegebenen Welteigenschaft beruht dann darauf, dass alle Wirklichkeitsbestimmungen als logisch strukturelle Schnittpunkte von einer unbegrenzten Anzahl von Universalkontexturen anzusehen sind. Nicht umsonst lesen wir deshalb auch in der ersten Anmerkung im ersten Kapitel der Großen Logik unmittelbar nach der Einführung von 'Sein' und 'Nichts' und 'Werden': "Es muss ... vom S e i n und N i c h t s gesagt werden, dass es nirgend im Himmel und auf Erden Etwas gebe, was nicht Beides, Sein und Nichts in sich enthielte." Die Hegelsche Dialektik setzt mithin eine Polykontexturalitäts-These voraus. Bezeichnenderweise beginnt die Große Logik mit der Entgegensetzung zweier universaler Leerbereiche, die Hegel reines reflexionsloses Sein und reines unbestimmtes Nichts nennt. Was Hegel unter diesen beiden Termini jeweilig beschreibt, ist nichts anderes als das, was wir eine Universalkontextur genannt haben. Hegel zeigt sofort, dass, wenn zwei solche universalen Leerbereiche oder Kontexturen unmittelbar miteinander konfrontiert werden, sich ihr gegenseitiges Verhältnis nur dialektisch verstehen lässt. Einerseits sind sie ununterscheidbar, wenn man sie in ihrer totalen Leerheit miteinander vergleicht, andererseits sind sie aber doch unterscheidbar, vorausgesetzt, dass man mindestens eine dritte Kontextur einführt. Für eine solche Einführung bestehen mehrere Gründe, von denen wir hier nur einen angeben wollen. Wir benötigen nämlich einen von den ersten beiden Kontexturen unterscheidbaren kontexturalen Raum, in dem sich ein solcher Differenzierungsprozess vollziehen kann. Im Falle der Hegelschen Logik wird diese dritte Universalkontextur als Werden bezeichnet. Sie vermittelt durch ihre Momente, nämlich Entstehen und Vergehen, zwischen den vorangehenden Universalkontexturen von Sein und Nichts.

---

[6] Der bekannteste Ausdruck der Einzigkeit der Universalkontextur ist die coincidentia oppositorum des Nicolaus Cusanus. Ihre Einzigkeit ist (unter der Cusanus selbstverständlichen Voraussetzung des Monotheismus) dadurch garantiert, dass Gott selbst diese Coincidentia ist. Ganz missverständlich aber – jedenfalls soweit das Interesse der Dialektik in Frage kommt – beruft sich Schelling auf die Coincidentia. Vgl. Vorl. über d. Meth. d. akad. Studiums. WW V. 267 ff.

Es ist nun nicht schwer zu zeigen, dass – wenn erst einmal drei Universalkontexturen eingeführt sind – man dabei nicht stehen bleiben kann und immer neue Kontexturen einführen muss. Für jede dieser Kontexturen gilt, was für die klassische Universalkontextur von Sein überhaupt ausgesagt worden ist, nämlich dass sie inhaltlich unbeschränkten logischen und mathematischen Operationen Raum geben[7]. Dieser Anreicherung an Kontexturen ist prinzipiell keine Grenze gesetzt.

Begegnen wir aber in unserem Universum einer Vielheit von Universalkontexturen, dann müssen wir sie auch zählen können. Versuchen wir aber, sie zu zählen, so befinden wir uns sofort im Problembereich jener spezifischen Dialektik, die im Begriff der natürlichen Zahl investiert ist.

Fasst man nämlich den Zählprozess, in dem sich das System der natürlichen Zahlen aufbaut, als eine sich immer erneuernde Hinzufügung von Einheiten zu bereits gesetzten Einheiten auf, dann erhebt sich gemäß den Prinzipien der Hegelschen Logik die Frage: Sollen sich diese Einheiten – die in unserem speziellen Fall als Universalkontexturen zu identifizieren sind – als ununterscheidbare oder als unterscheidbare akkumulieren? Wir wollen diese beiden Formen von Akkumulation von jetzt ab streng begrifflich trennen und in dem ersten Fall von einer iterativen und in dem zweiten von einer akkretiven Anreicherungsmethode sprechen[8].

Bezeichnen wir die Kontexturen mit kleinen Buchstaben des Alphabets und stipulieren wir, dass wenn wir mehrere solche Kontexturen als ununterscheidbar aber trotzdem als Vielheit betrachten, wir stets den Buchstaben a benutzen, im Akkretionsfall aber immer einen neuen Buchstaben einführen, dann ergibt sich die folgende Tafel (I), in welcher konsequente iterative und konsequente akkretive Akkumulation von Einheiten mit der traditionellen Peano-Folge der natürlichen Zahlen konfrontiert worden sind[9].

Tafel (I) zeigt uns also nichts weiter als eine Peano-Folge in drei verschiedenen Notationen. Im Zentrum finden wir die Sequenz angeschrieben unter der stillschweigenden Voraussetzung, dass wir uns der Ziffern des Dezimalsystems bedienen. Auf der linken Seite finden wir die durch jene Ziffern indizierten Zahlen derart in ihre konstituierenden Einheiten aufgelöst, dass wir die Einheiten als ununterscheidbar im Sinne der Hegelschen Nicht-Unterscheidbarkeit von Sein und Nichts betrachten. Das heißt, jede der ersten folgende Einheit ist nichts weiter als eine monotone Iteration des bereits angeschriebenen. Wir betrachten also die iterative Folge zweier beliebiger Einheiten wie identische Zwillinge, an denen wir keine

---

7 Das gilt bei Hegel ausdrücklich auch vom Nichts. Denn er spricht unmissverständlich vom Nichts "in seiner unbestimmten Einfachheit" und im Gegensatz dazu vom "bestimmte(n) Nichts" (Hegel: WW IV. p. 67f.). Er unterscheidet also das Nichts als kontexturalen Leerraum vom inhaltlich bestimmten.

8 Die gegenwärtige Mathematik neigt (dem Vorbild des Aristoteles folgend) eher dazu, den Aufbau der natürlichen Zahlen iterativ zu interpretieren. Ein Beispiel: die Hilbertschen Zahlenaxiome:
"a' = 0 und
$[A(0) \,\&\, (a)[A(a) \rightarrow A(a')]] \rightarrow A(b)$
Also ist a' die auf a folgende Zahl und die ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... können angeschrieben werden als 0', 0'', 0''', ... ". D. Hilbert: Die Grundlagen der Mathematik, Teubner, Leipzig 1923, p.4.

9 Von der bereits an anderer Stelle angedeuteten Unterscheidung von Elementar- und Verbundtextur wird noch kein Gebrauch gemacht. Vgl. des Verfassers Essay 'Die Historische Kategorie des Neuen' in Hegel-Jahrbuch 1970 (Ed. W. R. Beyer), p.34-61.

unterscheidenden Merkmale entdecken können. Aber trotzdem fällt es uns nicht ein, solche Zwillinge als eine Person zu zählen.

Tafel I

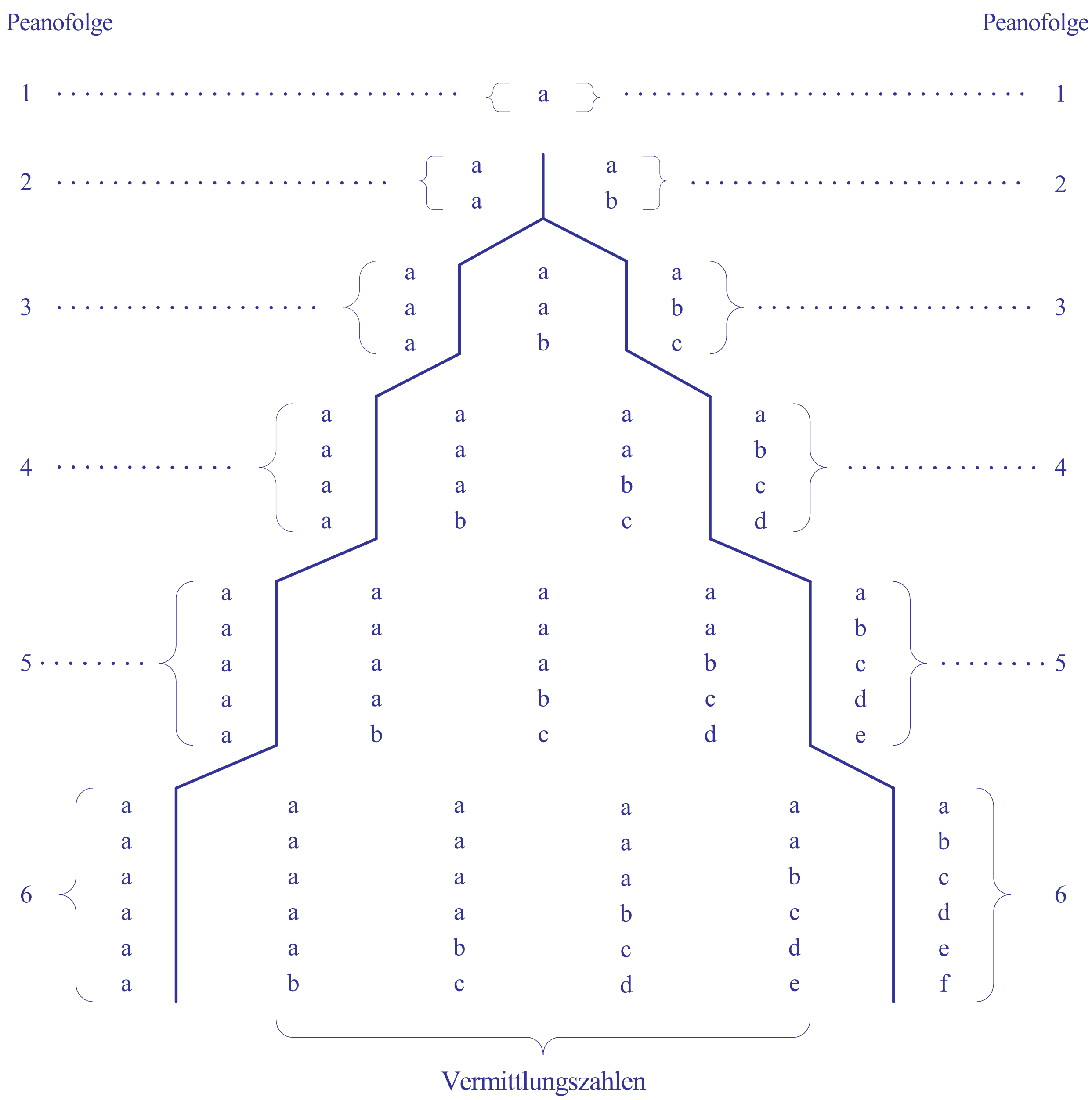
Iteration	Peanofolge	Akkretion
a	1	a
a a	2	a b
a a a	3	a b c
a a a a	4	a b c d
a a a a a	5	a b c d e
a a a a a a	6	a b c d e f
Erste logische Interpretation einer Peanofolge		Zweite logische Interpretation einer Peanofolge

Dialektischer Gegensatz in der natürlichen Zahl (unvermittelt)

Auf der rechten Seite der Tafel (I) haben wir dieselbe Folge erneut angeschrieben. Aber diesmal haben wir stipuliert, dass in der Akkumulation von Einheiten, durch die sich eine Peano-Folge konstituiert, keine dieser Einheiten eine bloße Iteration der jeweils vorangehenden darstellt, sondern dass sich jetzt zwei beliebige Einheiten so voneinander unterscheiden wie Zwillinge, von denen das eine Kind männlichen und das andere weiblichen Geschlechts ist. Um es kurz zusammenzufassen: die in der Mitte mit arabischen Ziffern angeschriebene Peanofolge ist auf der linken und auf der rechten Seite in ihre eine Dialektik produzierenden Momente derart auseinandergelegt, dass dieselbe Sequenz einmal als Zählung des Gleichen, das andere Mal als Zählung des Ungleichen erscheint. Alle in Tafel (I) angeschriebenen Sequenzen folgen der Vorschrift, dass jede Zahl, die größer als 1 ist, nur einen einzigen unmittelbaren Vorgänger und nur einen einzigen unmittelbaren Nachfolger hat. Mit dieser Antithese von Iteration und Akkretion ist nun die Möglichkeit des Aufweises einer dialektischen Struktur im Begriff der natürlichen Zahl gegeben, weiter aber vorläufig nichts.

Es ist selbstverständlich, dass vermittels der hier gewählten Methode diese Dialektik in der einfachen Einheit (d.h. mit solitärem a) nicht demonstriert werden kann. Aber auch nicht in der Zweiheit. Also auch nicht mit aa oder ab. Denn wenn wir 'zwei' sagen, so können wir nichts weiter feststellen, als dass uns die Möglichkeit gegeben ist, den Fortgang von der Einheit zur Dualität entweder iterativ oder akkretiv zu interpretieren. Beide Interpretationen stellen ein abstraktes Umtauschverhältnis dar, d.h., sie verhalten sich so zueinander wie positiv und negativ in der klassisch-zweiwertigen Negationstafel. Wir begegnen aber einer neuen Situation, wenn wir drei Einheiten zusammenzählen. Es stellt sich nämlich jetzt heraus – und die Tafel (II) illustriert diesen Fall – dass wir für die logisch strukturelle Interpretation von Dreiheit ein Minimum von 3 verschiedenen Deutungen zur Verfügung haben. Erstens können wir wieder wie im Falle von Zweiheit festsetzen, dass die Akkumulation der Einheiten entweder radikal iterativ oder konsequent akkretiv gedeutet werden soll. Jetzt steht uns aber zusätzlich eine weitere logische Möglichkeit offen. Wir können nämlich postulieren, dass von den 3 Einheiten sich beliebig 2 iterativ und die verbleibende dritte sich akkretiv akkumulieren soll.

Tafel II



Damit aber, dass zweimal das Gleiche und einmal ein Verschiedenes zusammengefügt werden sollen, erzeugt sich in der Dreiheit zum ersten Mal die Idee der dialektischen Zahl, wie Tafel (II) demonstriert. Denn wenn wir annehmen, dass 2 der konstituierenden Einheiten iterativ verbunden sein sollen, die verbleibende aber mit den anderen beiden akkretiv assoziiert ist, dann haben wird a mit für diesen Fall impliziert, dass in der Dreiheit Identität und Andersheit miteinander logisch vermittelt sind. Eine Zahl, in der sich im Akkumulationsprozess der Einheiten die beiden Momente der Gleichheit und Verschiedenheit miteinander verbinden, wollen wir von jetzt ab als Vermittlungszahl bezeichnen.

In Tafel (II) ist der logische Raum der Vermittlungszahlen von den voll iterierten und voll akkretiven Peano-Folgen durch eine sich nach aa und ab gabelnde Linie abgegrenzt. Die erste Vermittlungszahl unmittelbar nach der Gabelung ist durch die vertikale Buchstabenfolge aab repräsentiert. Diese Buchstabenfolge bedeutet, dass die ursprüngliche Einheit erst einmal iteriert wird und dass die restliche Einheit dann akkretiv hinzugesetzt wird. Es stünde uns selbstverständlich aber auch frei zu sagen, dass wir von der akkretiven Zweiheit ab ausgehen und an dieselbe iterativ a oder iterativ b anfügen. In diesen beiden Fällen würden sich dann die Buchstabenfolgen aba und abb ergeben, die in unserer Tafel (II) nicht angeschrieben sind. Der Grund für diese Auslassung ist ein rein praktischer. Wie man sieht, erreichen wir durch die Kombination von iterativen und akkretiven Momenten in der Dreiheit bereits 3 strukturell unterscheidbare Bedeutungen für Vermittlung. Bei konsequenter Weiterführung dieser Methode ergeben sich dann bereits 13 Vermittlungszahlen für Vierheit und dann sogar 50, wenn wir auch nur einen Schritt über die Vierheit hinausgehen. Da der Raum fehlt, um diese Erweiterung anzuschreiben, haben wir Tafel (II) einer radikalen Reduzierung durch die folgenden Stipulationen unterworfen: erstens soll es nur erlaubt sein, den Buchstaben a zu iterieren und weiterhin soll vorläufig die Position eines Buchstabens in jeder gegebenen vertikalen Symbolfolge irrelevant sein. Wir folgen dabei der Konvention, dass alle Buchstaben in alphabetischer Reihenfolge gebraucht werden und dass also der Buchstabe b erst dann auftreten darf, wenn alle Iterationen von a für eine gegebene Folge erschöpft sind.

Mit diesen Einschränkungen, die uns immer noch erlauben, die logische Eigenart einer dialektischen Anordnung der natürlichen Zahlen festzustellen, haben wir es erreicht, dass sich die Anzahl der Vermittlungszahlen auf jeder Stufe nur um ein einziges Exemplar vermehrt. Der spezifische Charakter unserer Stufenpyramide, die in Tafel (II) abgebildet ist, zeigt sich nun darin, dass durch die Vermittlungszahlen die fundamentale antike Maxime des ὁδὸ ἄνω κάτω μία und ihre Gültigkeit verliert. Dieser Grundsatz, der besagt, dass der Weg vom Allgemeinen zum Besonderen und der rückläufige Weg vom Besonderen zum Allgemeinen identisch sind – und der für die Platonische Pyramide der Diaeresis unbedingt gültig ist –, bleibt in unserer Tafel (II) nur noch für die beiden Grenzfälle der reinen Iteration und der konsequenten Akkretion erhalten. Aber schon die Folge aab ist von der Spitze unserer Stufenpyramide aus auf zweierlei Weise zu erreichen, entweder über aa oder über ab. Und die beiden Vermittlungszahlen aaaabc und aaabcd, die Varianten der Zahl 6 repräsentieren, können von 1 aus (1 = a) schon auf je 10 verschiedene Weisen angesteuert werden. Allgemein gesprochen: für eine Zahlenordnung, die Vermittlungszahlen einschließt, gilt nicht mehr das klassische Prinzip, dass jede natürliche Zahl (abgesehen von der ersten) nur e i n e n unmittelbaren Vorgänger und nur e i n e n unmittelbaren Nachfolger hat.

Wenn Hegel wiederholt bemerkt, dass das System der natürlichen Zahlen das Untauglichste ist, um dialektische Begriffsbestimmungen auszudrücken, so hat er zweifellos nur die lineare Zahlenfolge der klassischen Tradition im Sinne, die entweder als konsequente Iteration oder als ebenso konsequente Akkretion deutbar ist. Für diese Grenzfälle besteht sein Urteil zu Recht. Es trifft aber nicht mehr zu, wenn man die Vermittlungszahlen als Verbindungen des iterativen und des akkretiven Moments einbezieht. Man darf jetzt wohl sagen, dass weder in der undialektischen noch in der dialektischen Logik – soweit die letztere algorithmisierbar ist – irgendeine logische Relation existiert, die sich nicht vermittels jenes Zahlentypus ausdrücken lässt, der durch Tafel (II) und ihre möglichen Erweiterungen repräsentiert ist.

Sind wir soweit gekommen, so bleibt für die gegenwärtige Analyse nur noch festzustellen, was in den Vermittlungszahlen durch die Verbindung von Iteration und Akkretion eigentlich beschrieben werden. soll. Wir gingen davon aus, dass der beträchtliche wissenschaftstheoretische Fortschritt, der in der Hegelschen Philosophie angelegt ist, darin besteht, dass durch die Hegelsche Logik das mono-kontexturale Weltbild der klassischen Tradition verworfen wird und dass das spekulative Denken die Wirklichkeit als poly-kontexturales System zu begreifen versucht.

Da nun die Peano-Folge der natürlichen Zahlen einen Abzählprozess repräsentiert, der sich streng innerhalb einer gegebenen Universalkontextur vollzieht, ergibt sich daraus für die Theorie der Vermittlungszahlen das folgende: Zunächst muss festgehalten werden, dass in einem poly-kontexturalen Weltsystem jede Universalkontextur ihre eigene Peano-Folge besitzt, die ausschließlich auf sie bezogen ist und die rein intra-kontextural abläuft. Und da wir prinzipiell eine unbegrenzte Anzahl von Universalkontexturen stipulieren müssen, so ergibt sich daraus, dass wir auch mit einer unbeschränkten Vielheit von solchen individuellen Peano-Folgen zu rechnen haben, die gegeneinander durch die jeweiligen Kontexturgrenzen abgeschirmt sind. Damit aber drängt sich uns jetzt die neue Frage auf, ob es möglich ist, zusätzlich zu solchen intra-kontexturalen Zahlenfolgen auch trans-kontexturale Zahlenabläufe zu konstruieren. Unter einem trans-kontexturalen Zahlenablauf verstehen wir eine lineare Folge, die intrakontextural in einer gegebenen Universalkontextur beginnt, und nach einer mehr oder weniger großen Akkumulation von Einheiten in eine andere Kontextur überschreitet, dort sich entweder unbeschränkt weiter akkumuliert oder aber in gewissen arithmetischen Abständen weitere trans-kontexturale Überschreitungen vornimmt. Es ist offenkundig, dass wir in einem solchen Fall zweierlei zu registrieren hätten: erstens intra-kontexturale Akkumulation und zweitens trans-kontexturale Überschreitungen, die die 'Zahlenfolge' von einer Kontextur in einen neuen kontexturalen Zusammenhang weiterführen.

An dieser Stelle muss allerdings davor gewarnt werden, in der oben beschriebenen Unterscheidung von intra-kontexturalen und trans-kontexturalen Zahlenfolgen bereits eine zureichende Beschreibung des Problems der dialektischen Zahl zu sehen. Dazu ist dieselbe viel zu allgemein gehalten. Eine weiter präzisierende Formulierung ist notwendig. Der unmittelbare Übergang von einer Kontextur zu einer anderen stellt keine trans-kontexturale Überschreitung in dem hier intendierten Sinne dar, ebenso wenig wie in der Hegelschen Logik der Übergang von dem kontexturalen Leerbereich des Seins zu dem des reinen Nichts uns allein veranlassen könnte, unsere Mathematik zu erweitern und die Idee der dialektischen Zahl einzuführen. Sein und Nichts stellen am Anfang der Hegelschen Logik ein einfaches Umtauschverhältnis dar, das ausschließlich iterativ oder ausschließlich akkretiv interpretiert werden kann, ehe man zum Werden vorstößt. Eine trans-kontexturale Überschreitung hat aber immer nur dann stattgefunden, wenn der Übergang von einem kontexturalen Zusammenhang zum nächsten sowohl iterativ wie akkretiv erfolgt ist. Das ist conditio sine qua non. Ein entweder einseitig iterativer oder exklusiv akkretiver Übergang genügt – um es noch einmal zu wiederholen – nicht. Mit diesem kurzen Hinweis müssen wir uns an dieser Stelle begnügen (abgesehen von einigen etwas weiterführenden Bemerkungen im Appendix), da eine ausführliche Darstellung von Idee und Technik der trans-kontexturalen Überschreitungen den Rahmen dieser Betrachtung sprengen würde.

Beim Problem der dialektischen Zahl geht es um die logisch-arithmetische Verbindung von Qualität und Quantität, die in der Unterscheidung von Akkretion und Iteration impliziert angelegt ist. Wir alle wissen in einem landläufigen Sinn, worin der Unterschied von Qualität und Quantität besteht. Aber die Hegelsche Logik zeigt, dass in einer tieferen Bedeutung wir es eben doch nicht wissen. Die Schwierigkeit liegt bei der Frage nach dem Wesen der Qualität. Sagen wir z.B. 'rot', 'bitter' oder 'scharf', so haben wir zwar drei Qualitäten genannt, aber wenn man uns fragt, wie die Differenzen zwischen ihnen zu verstehen sind, so sind wir in Verlegenheit und werden vielleicht etwas ungeduldig antworten: Ja, das weiß man doch! Wir sind aber nicht in der geringsten Verlegenheit, wenn man uns auffordert, etwa die quantitativen Unterschiede der Zahlen 3, 5 und 8 anzugeben. Der Unterschied von Qualität und Quantität besteht also vorerst darin, dass es in dem ersten Falle schwierig und in letzter Konsequenz sogar unmöglich erscheint, einen Unterschied von Qualitäten präzis formal anzugeben, während im zweiten Fall der Unterschied nicht nur angebbar, sondern ganz genau bestimmbar ist. Das logische Verbindungsglied zwischen Qualität und Quantität liegt im Begriff der Einheit. Es ist selbstverständlich, dass jede Qualität qua Qualität als Einheit aufgefasst werden muss, die sich als solche von anderen Qualitäten absondert. Impliziert ist dabei, dass jede Einheit von der anderen grundsätzlich verschieden ist. Wäre das nicht der Fall, dann hätten wir es nicht mit Qualitätsdifferenzen zu tun. So weit also ist die Welt eine Akkumulation von Qualitäten. Andererseits aber muss der Aufbau der natürlichen Zahlen ebenfalls als eine Akkumulation von Einheiten betrachtet werden. Aber diesmal wird impliziert, dass diese Einheiten sich nicht im geringsten voneinander unterscheiden. Es geht jetzt mithin um eine Akkumulation von Quantitäten. Das dialektische Problem ergibt sich also aus der Einsicht, dass Einheit einer doppelten Behandlungsweise zugänglich ist – nämlich einer als Qualität und das andere Mal als Quantität – und es darauf ankommt, beide Behandlungsweisen in der dialektischen Systematik zu verschmelzen.

Selbstverständlich beschäftigt sich Hegel, soweit es um die Idee der Qualität geht, nicht mit solchen relativ unwichtigen Sub-Qualitäten wie 'rot', 'bitter', 'scharf', 'schön', 'klug' oder 'ausgedehnt' (um noch einige mehr zu nennen). Er geht sogleich auf zwei Urqualitäten zurück, die er Sein und Nichts nennt. Qualitäten sind letzten Endes nach Hegel universale Einheitsbereiche, die wir in unserer Betrachtung als Kontexturen bezeichnet und definiert haben. Arithmetisch gesprochen ist jede Kontextur immer eine undifferenzierte Einheit. Und da Einheit wie bereits bemerkt – sich auf zweierlei Weise behandeln lässt, je nachdem, ob sie im Bereich der Qualität – also als immer Anderes – oder im Bereich des Quantums – also als immer das Gleiche – auftritt, war es notwendig, einen operativen Begriff einzuführen, der die Differenz von Qualität und Quantität zu überbrücken fähig ist. Darin besteht die Funktion der Kontexturidee. Universalkontexturen repräsentieren erstens qualitative Unterschiede und zweitens sind sie als solche Einheiten. Da wir aber mit einer Vielheit von solchen Kontexturen rechnen müssen, ist durch den Gegensatz von Einheit und Vielheit eine zwanglose Verbindung zum System der natürlichen Zahlen gegeben, die in der vorangehenden Betrachtung in erster Annäherung dargestellt worden ist.

Wir resümieren: Das undialektische und deshalb mono-kontexturale Denken darf sich begnügen, mit einem ebenso undialektischen und deshalb linearen Ablauf der natürlichen Zahlen zu rechnen. Nimmt man aber an, dass eine durchzuführende Dialektik ein poly-kontexturales Weltbild impliziert, dann wiederholt sich in jeder Universal-Kontextur die Peano-Folge der natürlichen Zahlen immer wieder von neuem. Von hier aus betrachtet erscheint als erstes Problem der dialektischen Zahl die nicht ganz leicht zu lösende Aufgabe, die gegenseitigen Relationen zwischen diesen relativ unabhängigen Peano-Folgen festzustellen. Damit ist aber nur ein Anfang gemacht. Ihre eigentliche Subtilität entwickelt die Zahlendialektik erst dann, wenn wir berücksichtigen, dass die Akkumulation von Einheiten in den Peano-Folgen sowohl iterativ wie akkretiv verstanden werden kann, woraus sich bestimmte operative Folgen ergeben. Diese ab ovo intrakontexturalen Akkumulationsbegriffe lassen sich ohne prinzipielle Schwierigkeiten auf die Kontexturen selbst übertragen, wobei wir daran erinnern wollen, dass eine konsequente Anreicherung von kontexturalen Bereichen als iterative Identitäten ebensowenig eine dialektische Struktur produziert wie eine monotone Anreicherung von Andersheiten.

Gleichgültig aber, ob eine Universalkontextur mit einer anderen iterativ oder akkretiv assoziiert ist, es bleibt dabei, dass zwei Universalkontexturen relativ zueinander immer totale Fremdbereiche sind so wie Sein und Nichts. Jenseits einer Kontexturgrenze – also vom "Innenraum" einer Kontextur her gesehen – ist, um einen Hegelschen Ausdruck zu gebrauchen, immer "Äußerlichkeit". Nimmt man nun an, dass eine natürliche Zahl im Sinne einer Peano-Folge, also mit intra-kontexturalern Charakter, durch ihre Vorgänger- und Nachfolgerbeziehungen in einen Prozess trans-kontexturaler Überschreitung verwickelt wird, so erfährt sie damit eine 'Entäußerung'[[10]]. Wenn Hegel bündig sagt: "Die Zahl ist Gedanke ..."[[11]] so hat er sie damit vorerst in einer Reflexionskontextur eingeordnet, in der sie eben als Gedanke und n u r als Gedanke beheimatet ist. Aber ebenso erscheint die Zahl als mögliche objektive Bestimmung in der jenseitigen Sphäre des ursprünglich reflexionslosen Seins, in dessen Bereich sie als die einfachste Eigenschaft von Seiendem auftritt.

Die Zahl als Gedanke ist subjektiver Geist, also Innerlichkeit. Im Kontexturbereich des objektiven Seins aber wird sie zu einer Bestimmung der Äußerlichkeit.

In diesem Übergang vom Subjektiven zum Objektiven vollzieht der Gedanke eine trans-kontexturale Überschreitung, an deren dialektischem Ende er sich selbst in der Erkenntnis begegnet, dass Äußerlichkeit und Zählbarkeit das Gleiche sind; Hegel beschreibt diesen Sachverhalt in einer tiefsinnigen Definition der Zahl als Seinsbestimmung, mit der wir unsere Betrachtung schließen wollen. Wir finden sie in der Großen Logik und sie lautet:

---

[10] Hegel: WW VIII (Glockner), p.246.

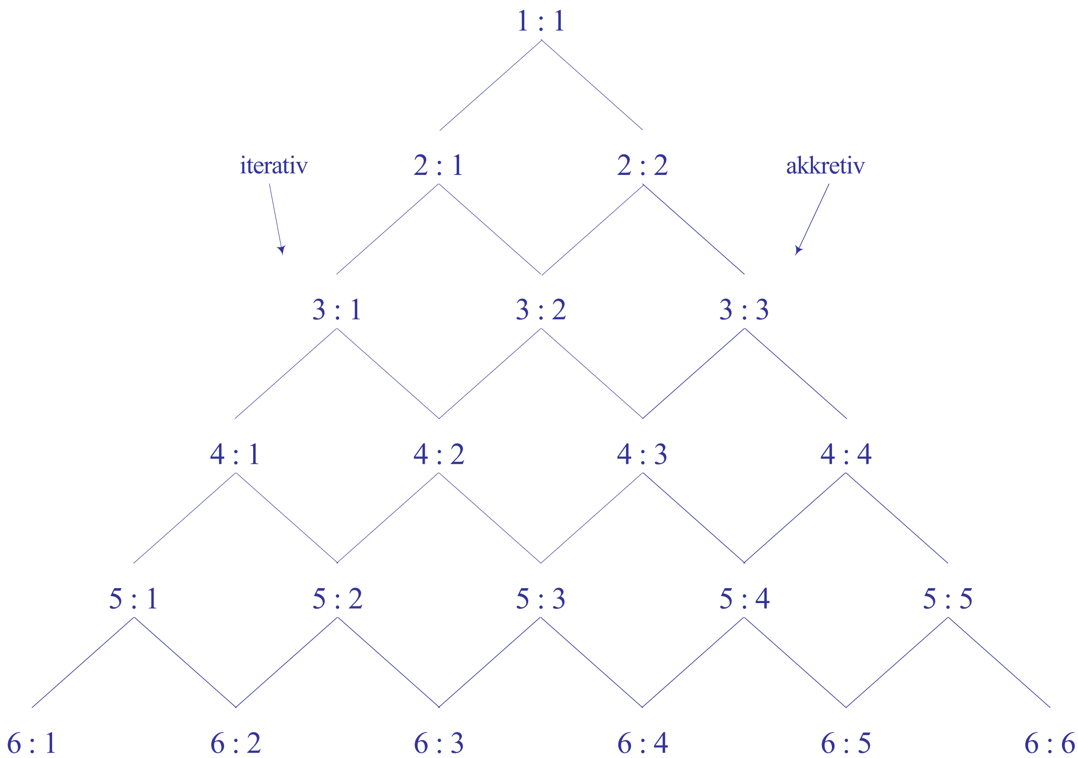
[11] Hegel: WW IV (Glockner), p.256.

"Als (der) Gedanke der Äußerlichkeit ist die Zahl zugleich die Abstraktion von der sinnlichen Mannigfaltigkeit; sie hat von dem Sinnlichen nichts als die abstrakte Bestimmung der Äußerlichkeit selbst behalten; hierdurch ist diese in ihr dem Gedanken am nächsten gebracht; sie ist der *reine Gedanke* der eigenen Entäußerung des Gedankens."

APPENDIX

Zwecks einer etwas weitergehenden Detaillierung der Idee der trans-kontexturalen Überschreitung führen wir die Tafel II noch einmal ein, aber mit einer gewissen Modifikation als Tafel III. Anstatt die Kontexturen mit den kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets zu bezeichnen, geben wir von jetzt ab nur die Länge der Buchstabenfolge an; darauf folgt ein Doppelpunkt und nach diesem die Angabe, wieviel verschiedene Buchstaben wir benutzt haben. Statt aabc z.B. schreiben wir also 4:3. Da die Pyramide in Tafel II mit einem einzigen a begann, beginnt die neue Pyramide jetzt in Tafel III mit dem Ausdruck 1:1. Diese Zahlenausdrücke verbinden wir diesmal mit geraden Linien derart, dass jede der Doppelzahlen die Spitze einer besonderen Pyramide bildet. Die allen andern übergeordnete Pyramide hat ihre Spitze in 1:1 und wird im weiteren Verlauf links durch die Folgen 2:1, 3:1, 4:1, 5:1 usw. und auf der rechten Seite durch 2:2, 3:3, 4:4, 5:5 usw. markiert. Wir haben anlässlich Tafel II im Text die eben angeführten Zahlausdrücke als iterative und akkretive Peano-Folgen bezeichnet und alle Ausdrücke innerhalb dieses Dreiecks – abgeteilt durch die gegabelte Linie – als Vermittlungszahlen. Diese bisherige Feststellung bleibt bestehen.

Tafel III

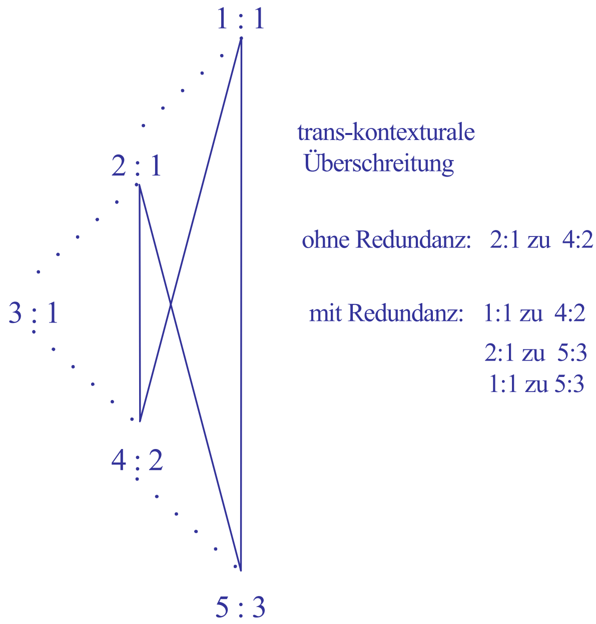


Wenn wir jetzt aber als Spitze des Dreiecks 2:1 wählen, dann ergibt sich auf der linken Seite eine Peano-Folge, die diesmal mit 2:1 beginnt und dann, wie oben beschrieben, weiterläuft. Das neue Dreieck besitzt aber außerdem seine akkretive Peano-Folge auf der rechten Seite, die mit 2:1, 3:2, 4:3, 5:4 beginnt und sich sinngemäß fortsetzt. Die erste Vermittlungszahl in diesem Dreieck wird mit 4:2 bezeichnet. Da aber das entsprechende auch von der Pyramide mit dem Apex 2:2 gesagt werden kann, ergibt sich daraus, dass jede Zahl, die relativ zu 1:1 Vermittlungszahl ist, in einer anderen Pyramide Glied einer Peano-Folge sein kann. Und da alle Vermittlungszahlen sowohl iterative wie akkretive Momente enthalten, kann jede Vermittlungszahl sowohl Glied einer iterativen als auch einer akkretiven Peano-Folge sein. In diesem Sinne ist sie der jeweilige Schnittpunkt zweier Peano-Folgen, von denen die eine sich immer rein iterativ und die andere rein akkretiv akkumuliert. Den Richtungsverlauf, den die iterativen bzw. die akkretiven Peano-Folgen nehmen, ist in Tafel III durch Pfeile angegeben.

An diesem Punkte ist es höchste Zeit, einem Einwand zu begegnen, der mit Sicherheit zu erwarten ist. Angesichts der Unterscheidung von Peano-Folgen und Vermittlungszahlen ist es durchaus möglich zu sagen, dass sich alle Vermittlungszahlen zwanglos in eine Peano-Folge einreihen lassen, die in unserem Falle am besten auf die folgende Weise dargestellt werden kann: 1:1, 2:1, 2:2, 3:1, 3:2, 3:3, 4:1, 4:2 usw. Der Grund für die Möglichkeit einer solchen Einordnung ist durch den Umstand gegeben, dass, wenn wir über ein polykontexturales Universum reden, sich unsere Sprachakte dennoch in einer einzigen Universalkontextur vollziehen, – und alle intra-kontexturalen Zahlabläufe stellen sich immer als Peano-Folgen dar. Aber mit dem Nachweis, dass alle Vermittlungszahlen sich in eine Peano-Folge einordnen lassen, ist das dialektische Problem der Zahl nur dann aus der Welt geschafft, wenn wir zur klassischen Metaphysik zurückgehen und ihre Mono-Kontexturalitätsthese akzeptieren. Damit verschwindet aber auch alle Dialektik aus der Welt, und das Phänomen Leben erscheint von neuem als ein Einbruch aus einer überirdischen Sphäre, ein Einbruch, der wissenschaftlich überhaupt nicht zu behandeln ist. Ergo ist dann auch die Idee einer Mathematik organischer Systeme absurd.

Akzeptiert man aber ein poly-kontexturales Weltbild, dann existiert ein echtes Problem trans-kontexturaler Überschreitung. Wollen wir z.B. eine Zahlenfolge bilden, die von 1:1 zu 5:3 führt, so kann das auf fünferlei Weise geschehen. Erstens durch 1:1, 2:1, 3:1, 4:2 und 5:3. Zweitens können wir aber auch wählen 1:1, 2:1, 3:2, 4:2, 5:3. Eine dritte Wahl ergibt sich durch 1:1, 2:2, 3:2, 4:2, 5:3. Weiterhin ist möglich 1:1, 2:2, 3:2, 4:3, 5:3. Als fünfte Wahl bleibt dann 1:1, 2:2, 3:3, 4:3, und 5:3, also das Spiegelbild zur ersten Wahl. In keinem Falle aber ist 5:3 unter Voraussetzung der Poly-Kontexturalität ohne mindestens eine transkontexturale Überschreitung zu erreichen. Wir wollen das an der Folge 1:1, 2:1, 3:1, 4:2, 5:3 demonstrieren, da in diesem Falle nur eine transkontexturale Überschreitung notwendig ist. Tafel IV demonstriert die Situation. Die Folge 1:1, 2:1 und 3:1 stellt den Anfang einer Peano-Folge dar, 3:1, 4:2, 5:3 den Anfang einer anderen. Die erste dieser beiden Folgen ist iterativ und die zweite akkretiv. Und da wir im Text festgestellt haben, dass eine trans-kontexturale Überschreitung nur dann stattgefunden hat, wenn der Übergang von einer Universal-Kontextur zur nächsten sowohl iterativ wie auch akkretiv durchgeführt ist, ergibt sich ein direktes trans-kontexturales Verhältnis nur zwischen den Ausdrükken 2:1 und 4:2. 2:1 stellt einen Iterationszustand dar; dem durch den Übergang zu 3:1 eine Iteration hinzugefügt wird.

TAFEL IV



Andererseits stellt der Übergang von 3:1 zu 4:2 eine Akkretion dar. Daraus ergibt sich, dass für die Relation zwischen 2:1 und 4:2 die Bedingung für eine trans-kontexturale Überschreitung gegeben ist, insofern als die Differenz zwischen 2:1 und 4:2 sowohl eine Iteration als auch eine Akkretion involviert. Eine trans-kontexturale Überschreitung hat also eine gewisse "Bandbreite". Man kann sie nicht auf eine bestimmte Zahl fixieren. Überdies muss hinzugefügt werden, dass die Überschreitung, die durch das Verhältnis von 2:1 und 4:2 gegeben ist, nur das Minimum einer solchen Überschreitung darstellt. Wie Tafel IV zeigt, muss man mit trans-kontexturalen Überschreitungen ohne Redundanz und solchen mit Redundanz rechnen. Die eben angeführte Überschreitung ist eine solche ohne Redundanz. Eine trans-kontexturale Überschreitung mit Redundanz ist in dem Verhältnis von 1:1 zu 4:2 zu sehen. Und zwar insofern, als zu einer Überschreitung eine Iteration und eine Akkretion gehört. Die Relation zwischen 1:1 und 4:2 aber impliziert zwei Iterationen und eine Akkretion. Sie ist mithin iterativ redundant. Andererseits konstituiert sich das Verhältnis von 2:1 zu 5:3 durch Hinzufügung einer Iteration, aber gleich zweier Akkretionen. Insofern handelt es sich hier um akkretive Redundanz. Schließlich ist aber auch mit Fällen zu rechnen, die iterative und akkretive Redundanz in einer Überschreitungsrelation vereinigen. Das ist in Tafel IV der Fall in der Beziehung von 1:1 zu 5:3. Redundanzen können selbstverständlich vermieden werden, indem man zu einer Mehrzahl von Überschreitungen Zuflucht nimmt. Aber da, wie bekannt, organische Systeme mit ganz erheblichen Redundanzen arbeiten, ist es wichtig, auf diese Unterschiede hinzuweisen.

vordenker
ISSN 1619-9324